Sonli ketma-ketlik va uning limiti

Yo'lbarsov Shavkatjon Baxtiyorjon o'g'li,
Andijon davlat universiteti Matematika fakulteti 4-kurs talabasi

Annotatsiya: *Ushbu maqolada sonli ketma-ketlik va uning limiti haqida chuqurroq ma'lumot beriladi. Matematik tahlil nazariyasida muhim o'rin tutadigan limit va ketma-ketliklar tushunchalari, ularning xossalari, yaqinlashuv va konvergentsiya nazariyalari matematik asosda o'rganiladi.*

Kalit so'zlar: *Sonli ketma-ketlik, sonli ketma-ketlik limiti, yaqinlashish, uzoqlashish, Koshi kriteyrisi.*

Matematika fanida sonli ketma-ketlik va uning limiti muhim tushunchalardan biri hisoblanadi. Matematik tahlilning markaziy yo'nalishi sifatida ketma-ketliklar boshqa ko'plab matematik tushunchalarni anglashda, ayniqsa qatorlar, integral va differensial tenglamalar tahlilida asos bo'lib xizmat qiladi. Har bir ketma-ketlikda elementlar cheksiz ravishda biror qiymatga yaqinlashishi yoki undan uzoqlashishi mumkin. Sonli ketma-ketlik matematik analizning muhim qismidir. Har qanday ketma-ketlik ($a_1, a_2, a_3, \ldots$) kabi bir tartibda berilgan sonlar to'plamidan iborat. Nazariy jihatdan sonli ketma-ketlik deb har qanday $f: N \to R$ akslantirishni tushunishimiz mumkin. Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlikda elementlar n yetarlicha katta bo'lganda biror a sonning ε atrofiga tushsa (bu yerda a sonning ε atrofi deganda $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ oraliq tushuniladi), biz bu ketma-ketlikning limiti bor deymiz va bu limitni quyidagicha belgilaymiz: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Buni matematik ta'rifini beramiz: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 \in N$ nomer topilsaki, ixtiyoriy $n > n_0$ nomerlar uchun $a_n \in U_\varepsilon(a)$ bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ ketma-ketlik a soniga *yaqinlashadi (intiladi)* deyiladi va

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ kabi belgilanadi. Aks holda ketma-ketlik *uzoqlashuvchi* deyiladi va bu holda uning limiti yo'q.

Ma'lumki, quyidagi munosaba o'rinli: $x \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Demak, bundan ko'rish mumkinki, sonli ketma-ketlikning limiti tushunchasini quyidagicha ham berishimiz mumkin:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \iff \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = a. \qquad (*)$$

Ketma-ketlik va limit tushunchasi tarixiy jihatdan ancha oldin o'rganilgan bo'lsa-da, zamonaviy shaklda Koshining ishlari bilan matematik analizda markaziy o'rin egalladi. Qadimgi Yunon matematiklari, xususan, Arximed orqali integral limit tushunchasini qo'llab, ko'pgina masalalarni hal qilishgan. XVIII asrda matematiklar ketma-ketliklar va qatorlarni tahlil qilishda Koshi va Lagranj metodlarni ishlab chiqishdi. Ular ketma-ketliklar yaqinlashuvini matematik tarzda aniqlash va tasdiqlash imkonini berdi.

Sonli ketma-ketliklarning yaqinlashuvi — bu matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri. Ketma-ketlikning limitini aniqlash uchun turli xil sinovlar qo'llaniladi. Koshi ketma-ketligi va yaqinlashish mezonlari matematik tahlilning muhim qismidir.

Sonli ketma-ketliklarning yaqinlashuvi va limit tushunchasi matematik analizning muhim tamoyillaridan biridir. Ketma-ketliklar nazariyasi turli sohalarda, jumladan, differensial tenglamalar, ehtimollar nazariyasi va qatorlar nazariyasida keng qo'llaniladi. Misollar orqali ko'rsatilganidek, ketma-ketliklar yaqinlashishi turli xil qiyinchiliklar bilan bog'liq bo'lishi mumkin, va har xil sinovlar bu jarayonni yengillashtiradi.

Misol. $a_n = 1/n$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ekanligini isbotlang.

Yechimi: (*) ta'rifga ko'ra $|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$. Demak, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ tengsizlikka ko'ra, $n > 1/\varepsilon$ bo'ladi. Bunga ko'ra $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}]$ deb olsak, $\forall n > n_0$ lar uchun $|a_n - a| < \infty$ bo‘lar ekan. Demak, sonli ketma-ketlikning limiti ta’rifga ko‘ra: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Isbot tamom.

Limitga ega bo‘lgan sonli ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1) Agar sonli ketma-ketlik o‘zgarmas bo‘lsa, ya’ni, $a_n = c = const$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ bo‘ladi;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, bu yerda $\forall n \in N$ uchun $b_n \neq 0$.

Limit tushunchasini chuqurroq tushunish har doim ham oson emas. Ba'zi murakkab ketma-ketliklarning yaqinlashuvini aniqlash, uzoqlashuvchi ekanligini isbotlash oson bo'lmagan jarayonlar bilan bog'liq bo'lishi mumkin. Bunday murakkabliklarni yengish uchun matematiklar turli xil sinovlar va nazariyalarni ishlab chiqqanlar.

Misol. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{20}(2n+1)^{10}}{(n+3)^{30}}$.

Yechish. Ko‘rish mumkinki, limit ostidagi ifodani soddalashtirsak, surat va maxrajda n ning eng yuqori daraja ko‘rsatkichi 30 ga teng bo‘ladi. Demak, berilgan ifodaning surat va maxrajini n^{30} ga bo‘lib yuboramiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{20}(2n+1)^{10}}{(n+3)^{30}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)^{20}(2n+1)^{10}}{n^{30}}}{\frac{(n+3)^{30}}{n^{30}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{20}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{10}}{\left(\frac{n+3}{n}\right)^{30}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{20}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{10}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{30}} =$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+2}{n}\right)^{20}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{10}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{30}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{20}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{10}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{30}}=$$

$$=\frac{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right)^{20}\left(2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{10}}{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\right)^{30}}=\frac{(1+0)^{20}(2+0)^{10}}{(1+0)^{30}}=1024.$$

Javob: 1024.

Limitlarni hisoblashda qo‘l keladigan asosiy limitlarni keltirib o‘tamiz:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0, bu\ yerda\ \alpha>0. \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}a^{n}=0, bu\ yerda\ 0<a<1.$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{n}}=0, bu\ yerda\ a>1. \quad d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{k}}{a^{n}}=0, bu\ yerda\ a>1.$$

$$e)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0. \qquad f)\ \lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1. \quad g)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n}}{n!}=0.$$

$$h)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}. \quad i)\ \lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=1. \quad j)\ \lim_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a.$$

$$k)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0, \quad l)\ \lim_{n\to\infty}n\tan\frac{1}{n}=1.$$

Ketma-ketliklarni yaqinlashishini aniqlashda Koshi kriteyrisidan ham ko‘p foydalaniladi:

Koshi kriteyrisi: $\{a_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $n_0\in N$ nomer topilsaki, ixtiyoriy $m,n>n_0$ nomerlar uchun $|a_n-a_m|<\varepsilon$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Limitlarni hisoblashda quyidagi teoreamalar ham ko‘p foydalaniladi:

Teorema 1. Agar ketma-ketlik monoton va chegaralangan bo‘lsa, u holda bu ketma ketlik limitga ega.

Teorema 2. Agar $\{a_n\}, \{b_n\}$ va $\{c_n\}$ ketma-ketliklar uchun shunday $n_0 \in N$ nomer topilib, ixtiyoriy $n > n_0$ nomerlar uchun $a_n \le b_n \le c_n$ va $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = K$ bo‘lsa, u holda $\{b_n\}$ ketma-ketlik uchun ham $\lim_{n\to\infty} b_n = K$ bo‘ladi.

XULOSA VA TAKLIFLAR

Sonli ketma-ketliklar va ularning limitlarini o'rganish matematik analizning asosiy yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Ularning har xil turlari va qo'llanishlarini o'rganish, yangi qiyoslash sinovlarini ishlab chiqish va boshqa murakkab ketma-ketliklarga qo'llash yo'nalishida tadqiqotlarni davom ettirish muhimdir.

Epsilon-delta ta'rifi ketma-ketliklarning limitini aniq aniqlash imkonini beradi, bu esa matematik isbotlarni qat'iylik bilan olib borishga yordam beradi. Bunday ketma-ketliklarning limitlari tahlili, ayniqsa, matematika va uning qo'llaniladigan sohalarida, masalan, iqtisodiyot, ehtimollar nazariyasi, differensial tenglamalar va boshqalarda katta ahamiyatga ega.

Misollar orqali ko'rganimizdek, ketma-ketliklarning limitini aniqlash ularning yaqinlashuv darajasini tushunish imkonini beradi. Geometrik va arifmetik ketma-ketliklar kabi oddiy ketma-ketliklar yaqinlashuvini bilish nafaqat matematik tadqiqotlarda, balki o'quv jarayonida ham osonlik bilan qo'llanilishi mumkin. Divergent ketma-ketliklarning xususiyatlarini o'rganish esa chuqurroq tahlillarni talab qiladi.

Keyingi tadqiqotlarda, yanada murakkab va real hayotda uchraydigan ketma-ketliklarni tahlil qilish orqali bu sohadagi yangi nazariyalarni ishlab chiqish lozim. Stokastik ketma-ketliklar va ularning limitlari bo'yicha izlanishlar olib borish imkoniyatlari ham keng, chunki ular amaliyotda, ayniqsa, ehtimollar nazariyasi va moliyaviy modellashtirishda muhim o'rin tutadi.

Yakunda shuni aytish joizki, sonli ketma-ketliklar nazariyasi matematik tadqiqotlarning o'zagi bo'lib, kelajakdagi izlanishlar orqali yangi natijalarga erishish imkonini beradi. Bu mavzuni o'rganishda chuqurroq qiziqish uyg'otish, zamonaviy matematikaning yanada kengroq sohasi bilan bog'lanishga xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert – *Introduction to Real Analysis*, 4th edition, John Wiley & Sons, 2011.

2. Elias M. Stein, Rami Shakarchi – *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.

3. Umirzaqova, Kamola Oripjanovna. "PERIODIC GIBBS MEASURES FOR HARD-CORE MODEL." *Scientific Bulletin of Namangan State University* 2.3 (2020): 67-73.

4. Xakimov, R. M. (2019). IMPROVEMENT OF ONE RESULT FOR THE POTTS MODEL ON THE CALEY TREE. *Scientific and Technical Journal of Namangan Institute of Engineering and Technology*, *1*(6), 3-8.

5. Qahramon o‘g, O. K. I., Hasanboy o‘g, J. R. A., & Hasanboy o‘g, X. J. R. (2024). ANIQ INTEGRAL YORDAMIDA BA’ZI BIR LIMITLARNI HISOBLASH METODLARI. *JOURNAL OF THEORY, MATHEMATICS AND PHYSICS*, *3*(6), 23-27.

6. Уктамалиев, И. К. "О предгеометриях конечно порожденных коммутативных полугрупп." *МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ*. 2022.

7. Уктамалиев, И. К. "О числе счётных моделей аддитивной теории натуральных чисел." (2022): 14-14.

8. Уктамалиев, И. К. О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИЙ МОНОИДОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. *с Composite authors, 2023 с Novosibirsk State Technical University, 2023*, 151.