МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА.

Ан А.Д.

Аннотация

В статье рассматриваются основные принципы метода, его теоретическая база и алгоритм применения. Основное внимание уделено построению контурных уравнений с использованием законов Кирхгофа и анализу их решения с учетом различных условий. Приводятся примеры практического применения метода, демонстрирующие его эффективность при расчете сложных цепей с несколькими источниками питания и узлами. Особое внимание уделено сравнительному анализу метода контурных токов с другими методами анализа цепей, такими как метод узловых потенциалов, для выявления их преимуществ и ограничений.

Ключевые слова: контур ток, действительный ток, контур, электрический узел, сопротивление, электродвижущая сила.

Метод контурных токов представляет собой аналитический подход, используемый для расчета электрических токов в сложных электрических цепях. Метод контурных токов использует виртуальные контурные токи, которые протекают в каждом из независимых контуров. Действительный ток в любой ветви определяется как алгебраическая сумма контурных токов, к которым эта ветвь принадлежит [1].

В основе метода лежит представление сложной электрической цепи в виде набора независимых замкнутых контуров. Для каждого из них составляются уравнения, связывающие контурные токи с напряжениями источников питания и параметрами элементов цепи (сопротивления, индуктивности, емкости). Эти уравнения формируются на основе второго закона Кирхгофа, который гласит, что алгебраическая сумма падений напряжений в замкнутом контуре равна алгебраической сумме электродвижущих сил в этом контуре.

Основные этапы метода:

1. Выбор независимых контуров: определяются минимально необходимые замкнутые пути для полного описания всех элементов цепи (при наличии в электрической цепи источников тока заменяются на эквивалентные источники напряжения).

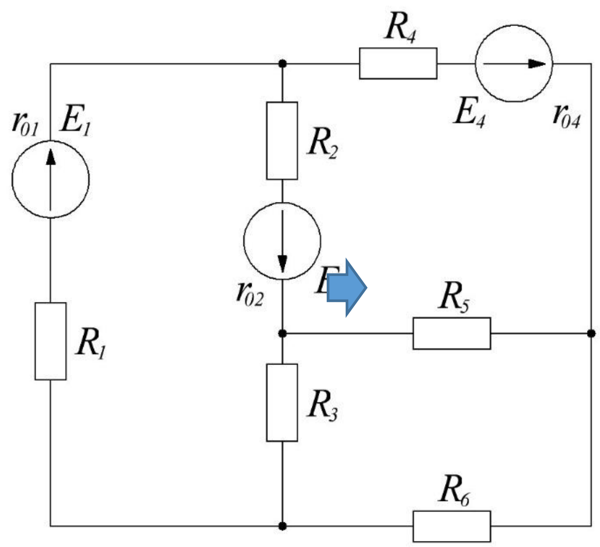
2. Задание направлений контурных токов: для каждого контура вводится произвольное положительное направление (по часовой или против часовой стрелки).

3. Задание произвольного направления действительных токов, протекающих в ветвях цепи.

4. Составление уравнений: для каждого выбранного контура записывается выражение второго закона Кирхгофа.

5. Решение системы уравнений: полученные уравнения решаются относительно контурных токов.

Контурные токи в цепи обычно обозначаются двойными индексами I_{11}, I_{22}, I_{33} и т.д. Действительные токи обозначаются единичными индексами I_1, I_2, I_3, I_4 и т.д. Направления контурных токов выбираются произвольно по часовой или против часовой стрелки. Направления действительных токов выбираются произвольно, но чаще всего они совпадают с направлением ЭДС. Направления токов выбираются таким образом чтобы в каждом узле были как входящие в узел токи, так и уходящие от него токи. **Контурная ЭДС** – это сумма всех ЭДС входящих в этот контур. **Собственным сопротивлением** контура называется сумма сопротивлений всех ветвей, которые в него входят. **Общим сопротивлением** контура называется сопротивление ветви, смежное двум контурам.



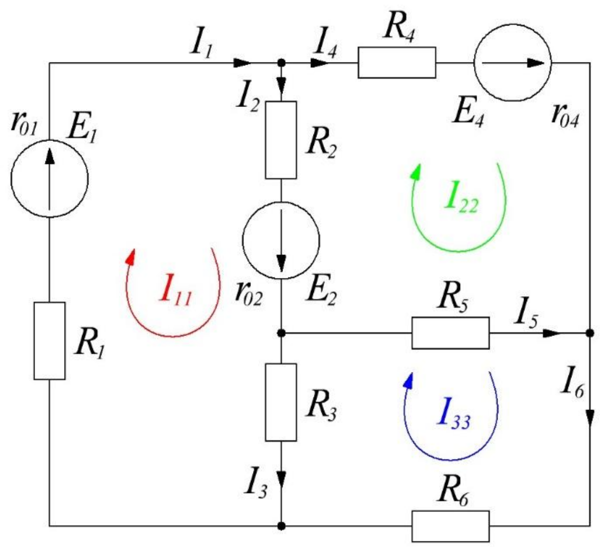


Рисунок 1. Пример выбора направлений действительных токов и выбора направления контурных токов.

После выбора направлений контурных токов составляются уравнения по второму закону Кирхгофа для независимых контуров.

$$\begin{cases} R_{kk}I_{kk} \pm \sum R_{km}I_{mm} \pm \sum R_{kn}I_{nn} = E_{kk} \\ \pm \sum R_{mk}I_{kk} + R_{mm}I_{mm} \pm \sum R_{mn}I_{nn} = E_{mm} \\ \pm \sum R_{nk}I_{kk} \pm \sum R_{nm}I_{mm} + R_{nn}I_{nn} = E_{nn} \end{cases}$$

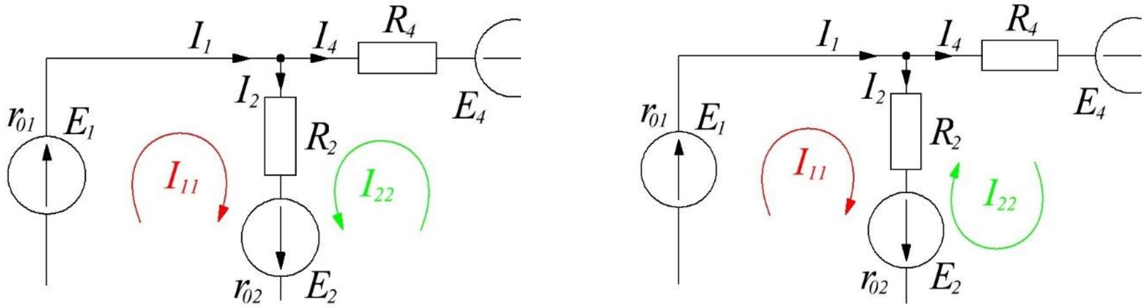
где R_{kk}, R_{mm}, R_{nn} – соответственно суммарное сопротивление *k, m, n* – контуров.

I_{kk}, I_{mm}, I_{nn} – контурный ток *k, m, n* – контуров.

$R_{km} = R_{mk}, R_{kn} = R_{nk}, R_{mn} = R_{nm}$ – общее сопротивление между *k*-контуром и *m*-контуром, *k*-контуром и *n*-контуром, *m*-контуром и *n*-контуром соответственно.

E_{kk}, E_{mm}, E_{nn} – суммарная ЭДС *k, m, n* – контуров.

Контурный ток рассматриваемого контура умножается на сумму сопротивлений своего контура и перед этим произведением всегда ставится знак «+». Соседний контурный ток умножается на общее сопротивление между соседним и рассматриваемым контурными токами. Перед данным произведением ставится знак «+» если направления этих контурных токов в общем сопротивлении совпадают между собой и ставится знак «–» если направления их не совпадают.



а) *б*)

Рисунок 2. На схеме *а* общее сопротивление между двумя контурами складывается $(R_2 + r_{02})$ и ставится знак «+».На схеме *б* общее сопротивление между двумя контурами складывается $(R_2 + r_{02})$ и ставится знак «–».

Для трёхконтурной цепи, изображенной на рисунке 1. Система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22} \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33} \end{cases} \quad (1)$$

где R_{11}, R_{22}, R_{33} − суммарное сопротивление первого, второго и третьего контуров.

Для схемы на рисунке 1 собственные сопротивления контуров равны

$$R_{11} = R_1 + r_{01} + R_2 + r_{02} + R_3$$
$$R_{22} = R_2 + r_{02} + R_4 + r_{04} + R_5$$
$$R_{33} = R_3 + R_5 + R_6$$

R_{12}, R_{21}, $R_{13}, R_{31}, R_{23}, R_{32}$ – общие сопротивления соответствующих контуров.

Для схемы на рисунке 1 общие сопротивления контуров равны

$$R_{12} = R_{21} = -(R_2 + r_{02})$$
$$R_{23} = R_{32} = -R_5$$
$$R_{13} = R_{31} = -R_3$$

E_{11}, E_{22}, E_{33} − суммарная ЭДС первого, второго и третьего контуров.

$$E_{11} = E_1 + E_2$$
$$E_{11} = E_4 - E_2$$
$$E_{33} = 0$$

Решается полученная система уравнений (1) по методу Гаусса, Крамера или обратной матрицы.

По методу Крамера сначала находят главный определитель Δ и далее находят дополнительные определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \quad \text{– главный определитель}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{vmatrix}$$

Неизвестные контурные токи находят по формулам:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Действительные токи находят как алгебраическую сумму контурных токов, проходящих по той же ветви.

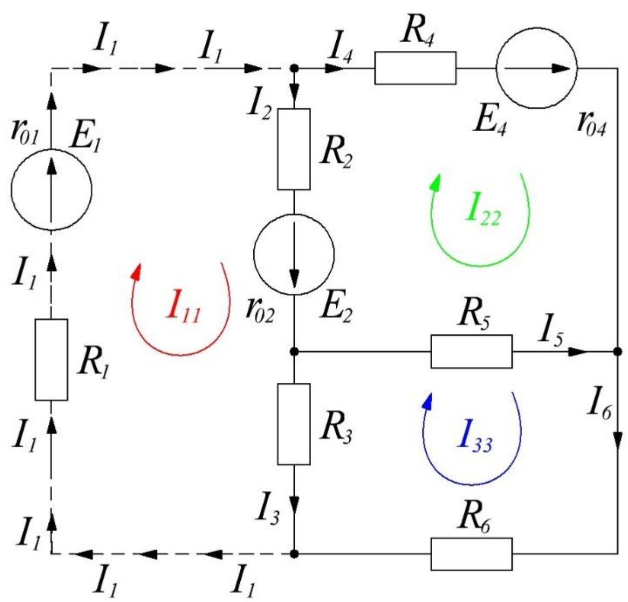


Рисунок 3. Направление движения действительного тока I_1

Для схемы на рисунке 3 действительный ток I_1 протекает с контурным током I_{11} в одном направлении. Так как других контурных токов нет в первой ветви то ток

$$I_1 = I_{11}$$

Так как направление контурного тока I_{11} совпадает с направлением действительного тока I_2 во второй ветви, то контурный ток I_{11} берётся со знаком «+», так как направление контурного тока I_{22} не совпадает с направлением действительного тока I_2 во второй ветви, то контурный ток I_{22} берётся со знаком «–». Тогда действительный ток I_2 равен

$$I_2 = I_{11} - I_{22}$$

Аналогично вычисляются остальные действительные токи для рисунка 3.

$$I_3 = I_{11} - I_{33}$$
$$I_4 = I_{22}$$
$$I_5 = I_{33} - I_{22}$$
$$I_6 = I_{33}$$

При получение отрицательного значения действительного тока, направление, выбранное вначале решения меняется на противоположное для этого тока.

Для проверки правильности решения составляются уравнения по первому и второму закону Кирхгофа для заданной цепи.

Для проверки также составляется баланс мощностей:

$$P_{\text{ист}} \approx P_{\text{потр}}$$

где $P_{\text{ист}}$ – суммарная мощность источников, Вт; $P_{\text{потр}}$ – суммарная мощность потребителей.

Данный метод удобен для расчёта сложных цепей с замкнутыми контурами и обеспечивает высокую точность при использовании современных вычислительных инструментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев А.Ю. Теоретические основы электротехники: учебное пособие. – Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. – 208 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. — 9-е изд., перераб. и доп. — М.: «Высшая школа», 1996. — 638 с.