SONLI KETMA-KETLIK VA UNING LIMITI

Abdumannobova Gavharoy

Andijon Davlat Universiteti matematika va mehanika fakulteti matematika yo'nalishi 4M1 guruh talabasi

Annotatsiya. *Ushbu maqolada sonli ketma-ketlik va unga olib keluvchi masalalar, sonli ketma-ketlikning berilish usullari va turlari hamda uning limitini hisoblash bo'yicha kerakli ma'lumotlar keltirilgan.*

Kalit so'zlar: *ketma-ketliklar, sonli ketma-ketliklar, rekurent formula, o'suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklar,monoton ketma-ketlik,limit.*

Sonli ketma – ketlik tushunchasini unga olib keluvchi masalalarni keltirish orqali boshlaymiz.

1.Tomoni a ga teng bo'lgan kvadratning yuzi S =a^2 ga teng. Bunga asosan tomonlari 1, 2, 3, 4, … birliklardan iborat bo'lgan kvadratlarning yuzalarini topib 1, 4, 9, 16, 25, … sonlar ketma – ketligini hosil qilamiz.

2. Ikkining taqribiy kvadrat ildizini topish uchun kami bilan olingan taqribiy kvadrat ildizlarining 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414214; … ketma – ketligini va ortig'i bilan olingan taqribiy kvadrat ildizlarining 1,5; 1,42; 1,4A15; 1,4143; 1,41422; 1,414214; … ketma – ketligini hosil qilamiz. Bu ikkala ketma – ketlik yordamida $\sqrt{2}$ sonining istalgan aniqlikdagi (kami bilan yoki ortig'i bilan) taqribiy qiymati aniqlanadi.

3. Birinchi hadi a_1 = 1 va mahraji q = 2 bo'lgan 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, … geometrik progressiya sonlar ketma – ketligidan iboratdir.

4.Birinchi hadi a_1=1va mahraji q=−1 bo'lgan 1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, … geometrik progressiya ham sonlar ketma – ketligidir.

Bu yerda keltirilgan ketma – ketliklarning har birida istalgan n natural songa mos keluvchi elementni topish imkoniyatiga ega bo'ldik. Masalan, birinchi misolda n=1 natural songa 1 soni, ikkinchi misolda 1,4 (va 1,5) soni, uchunchi misolda 1 soni, to'rtinchi misolda 1 soni mos keladi. $n = 2$ natural songa birinchi misolda 4 soni, ikkinchi misolda 1,41 (va 1,42) soni, uchunchi misolda 2 soni, to'rtinchi misolda esa -1 soni mos keladi. Demak, sonlar ketma – ketligini yozish uchun har bir natural songa (no'merga) ketma – ketligining n no'merli hadini, yani x_n sonni mos qilib qo'yadigan qoidani ko'rsatish kerak.

Ta'rif. Barcha $N = \{1,2,3,4,\ldots,n,\ldots\}$ natural sonlar to'plamida aniqlangan $f(n)$ funksiya cheksiz sonlar ketma – ketligi deyiladi.

f moslik har bir n natural songa $f(n)$ funksiyaning aniq qiymatini mos qilib qo'yadi. $f(n)$ funksiyaning bu qiymatlari qudagicha yoziladi:

$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$ (1)

$f(1)$ qiymatni x_1 bilan, $f(2)$ qiymatni x_2 bilan, $f(3)$ qiymatni x_3 bilan va hokazo belgilashlar qilib (1) sonlar ketma – ketligini quyidagicha yoziladi.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ (2)

Bu yerda, $x_n = f(n)$, $n = 1,2,3,4,\ldots$

Sonlar ketma – ketligini tashkil qiluvchi $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ sonlarning har birini ketma – ketlikning hadlari deyiladi. x_1 – birinchi had, x_2 – ikkinchi had, x_3 – uchunchi had va hokazo. x_n element n – had yoki sonlar ketma – ketligining umumiy hadi deyiladi. n natural son o'ziga mos kelgan x_n hadning nomerini bildiradi.(2) sonlar ketma- ketligi qisqacha (x_n) yoki $\{x_n\}$ bilan belgilanadi.

Sonlar ketma – ketligining ta'rifidan ko'rinadiki: 1) ketma – ketlikning hadlari cheksiz ko'p bo'ladi; 2) ketma – ketlikning hadlari natural sonlar bilan nomerlangan bo'ladi va nomerlari o'sib borish tartibida joylashgan bo'ladi.

Agar $n' > n$ bo'lsa, $x_{n'}$ ning x_n dan katta, kichik va hatto teng bo'lishiga qaramasdan $x_{n'}$ had x_n haddan keyin keladi.

Sonlar ketma – ketligiga quyidagilar misol bo'la oladi:

1. 2, 4, 6, 8, …, umumiy hadi $x_n = 2n$.
2. 1, 4, 9, 16, …, umumiy hadi $x_n = n^2$.
3. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots,$ umumiy hadi $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

4. $0,1,0,\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \ldots,$ umumiy hadi $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

5. -1,+1,-1,+1,…, umumiy hadi $x_n = (-1)^n$.

6. 3, 3, 3 , …, umumiy hadi $x_n = 3$.

1-3- misoldan ko'rinadiki, ketma – ketlik hadlarining nomerlari o'zgarishi bilan ularga mos kelgan hadlar ham o'zgaradi. 4-5- misollarda esa ketma – ketlik hadlarining nomerlari o'zgarishi bilan ularga mos kelgan hadlarining ba'zilari bir hil bo'lishini ko'ramiz. 6- misolda ketma – ketlikning hamma hadlari bir – biriga teng bo'lgan 3 sonidan iborat, ya'ni ketma – ketlik hadlarining nomerlari o'zgarishi bilan uning hadlari o'zgarmaydi.

Sonli ketma-ketlikning berilish usullari. Sonli ketma – ketlik bir necha usullar bilan berilishi mumkin:

1°. Sonli ketma – ketlik formula bilan berilishi mumkin. Bu formula ketma –ketlikning istalgan n- nomerli hadini topish imkonini beradi. Bu formula ketma – ketlik umumiy hadining formulasi deyiladi.

Masalan; Sonli ketma – ketlikning umumiy hadi $x_n = \frac{n}{2n-1}$ formula bilan berilagan bo'lsin. n o'zgaruvchiga 1, 2, 3, 4, … qiymatlarni qo'yib quyidagiga ega bo'lamiz:

$x_1 = \frac{1}{2*1-1} = 1$, $x_2 = \frac{2}{2*2-1} = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{3}{2*3-1} = \frac{3}{5}$, yoki $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \ldots, \frac{n}{2n-1}, \ldots$

2°. Sonli ketma – ketlik so'z ifodasi bilan ham berilishi mumkin. Ketma – ketlik bu usulda berilganda istalgan $n-$ nomerga mos kelgan hadni topish qoidasi so'z bilan ifodalangan bo'ladi.

Masalan; 1,4; 1,41; 1,414; … ketma – ketlik $\sqrt{2}$ sonining 0,1; 0,01; 0,001; … va hokazo aniqlikda kami bilan olingan taqribiy qiymatlaridan tuzilgan.

3°. Sonli ketma – ketlik rekurent formula yordamida ham beriladi. Ketma – ketlik bunday usul bilan berilganda, uning avvalgi bir necha hadlari ko'rsatiladi, keying hadlari biror qoidaga ko'ra shu berilgan hadlar orqali topiladi.

Masalan; $x_1=1$, $x_2=1$ bo'lsin. Bundan keyingi har bir hadi esa o'zidan oldingi ikki hadining yig'indisi bilan aniqlanadi, ya'ni $x_1=1$, $x_2=1$ bo'lib, $n>2$ bo'lganda:

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

Bu qoidaga asosan quyidagi ketma – ketlik hosil bo'ladi:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … 10

Bu ketma – ketlikni Fibonachchi ketma – ketligi deyiladi. (Leonard Pizanskiy Italiyalik matematik bo'lib, uni Fibonnachi deb ataganlar. U XII-XIII asrlarda yashagan).

4°. Ketma – ketlik dastlabki bir nechta hadi bilan ham berilishi mumkin. Bunda berilgan bir nechta hadlardan foydalanib uning qolgan hadlarini va umumiy hadini topish mumkin bo'ladi.

Masalan. $\frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, \frac{30}{31}, \ldots$ ketma– ketlikning umumiy hadi yozilsin? Yechish: Bu ketma – ketlikning har bir hadini surati o'z nomerini kvadrati bilan besh soning yig'indisidan, mahraji esa o'z nomerini kvadrati bilan olti soning yig'indisidan iborat, yani $x_n = \frac{n^2+5}{n^2+6}$

Sonli ketma-ketliklarning turlari. Monoton, monoton bo'lmagan, chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar, ketma- ketliklarning sodda turlari hisoblanadi.

Ta'rif: Agar $\{x_n\}$ sonli ketma – ketlik uchun

$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$

bo'lsa ya'ni barcha n lar uchun $x_{n+1} > x_n$ tengsizlik bajarilsa,bunday ketma – ketlik o'suvchi ketma – ketlik deyiladi. Masalan, n nomerning o'sishi bilan $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}$ ketma – ketlikning hadlari o'sib boradi. O'suvchi sonlar ketma - ketligining har bir navbatdagi hadi o'zidan oldingi hadidan katta bo'ladi.

Ta'rif: Agar $\{x_n\}$ sonli ketma – ketlik uchun

$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$

bo'lsa, ya'ni barcha n lar uchun (biror n dan boshlab bo'lsa ham) $x_{n+1} > x_n$ tengsizlik bajarilsa, bunday ketma – ketlik kamaymaydigan ketma – ketlik deyiladi. Masalan: 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, … kamaymaydigan sonli ketma – ketlikdir.

Ta'rif: Agar $\{x_n\}$ sonli ketma–ketlik uchun $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x > \cdots$ bo'lsa, ya'ni barcha n lar uchun $x_{n+1} < x_n$ tengsizlik bajarilsa,bunday ketma–ketlik kamayuvchi ketma – ketlik deyiladi. Masalan, umumiy hadi $x_n = \frac{n+1}{n}$ bo'lgan sonli ketma – ketlik kamayuvchi ketma = ketlikdir.

Ta'rif: Agar $\{x_n\}$ sonli ketma – ketlik uchun

$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$

bo'lsa, ya'ni barcha n lar uchun $x_{n+1} \leq x_n$ tengsizlik bajarilsa, bunday ketma – ketlik o'smaydigan ketma – ketlik deyiladi.

O'suvchi, kamayuvchi, o'smaydigan, kamaymaydigan ketma – ketliklar monoton ketma – ketliklar deyiladi. Har qanday ketma – ketlik monoton ketma – ketlik bo'lavermaydi. Masalan, quyidagi ketma – ketliklar monoton bo'lmagan ketma – ketliklardir:

$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$

$1, 3, 1, 3, \ldots, 2 + (-1)^n, \ldots$

Ta'rif: Agar ixtiyoriy n nomer uchun $x_n \leq M$ tengsizlik bajarilsa, u holda ketma - ketlik yuqoridan (M bilan) chegaralangan deyiladi. Masalan, -1, -2, -3, -4, … , ketma – ketlik yuqoridan chegaralangan.

Ta'rif: Agar ixtiyoriy n nomer uchun $x_n \geq m$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ ketma- ketlik quyidan chegaralangan deyiladi. Masalan, 1, 2, 3, 4, 5, …, ketma - ketlik quyidan chegaralangan

Ta'rif: Agar ketma -ketlik ham quyidan , ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda uni chegaralangan ketma – ketlik deyiladi. Masalan, $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n} \ldots$ ketma -ketlik chegaralangan ketma – ketlikdir.

Sonli ketma-ketlikning limiti. Ta'rif: Agar ixtiyoriy musbat ε son uchun shunday N nomer mavjud bo'lsaki, barcha $n >$ N lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a soni $\{x_n\}$ ketma – ketlikning limiti deyiladi. a soni $\{x_n\}$ ketma – ketlikning limiti ekanligi quyidagicha yoziladi.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ISSN 3060-4567

Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlik biror chekli a limitga ega bo'lsa, bunday ketma – ketlik yaqinlashuvchi ketma – ketlik deyiladi. Limitga ega bo'lmagan ketma – ketlikni uzoqlashuvchi ketma – ketlik deyiladi. Limitga ega bo'lgan ketma – ketliklar uchun bir nechta teoremalar mavjud:

1-teorema. Ketma – ketlik faqat bitta limitga ega bo'ladi.

2-teorema. Har qanday yaqinlashuvchi ketma – ketlik chegaralangandir.

3-teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar mos ravishda a va b limitlarga ega, ya'ni $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ hamda a<b bo'lsa, shunday N nomer topiladiki, n>N bo'lganda $x_n < y_n$ bo'ladi.

4-teorema. Agar $\{x_n\},\{y_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma – ketliklar uchun $x_n \le y_n \le z_n$ tengsizliklar bajarilib $\{x_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma – ketliklar umumiy a limitga ega, ya'ni $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ bo'lsa, $\{y_n\}$ ketma – ketlik ham o'sha a limitga ega bo'ladi, ya'ni $\lim_{n\to\infty} y_n = a$

5-teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklarning ikkalasi ham yaqinlashuvchi va $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lsa, u holda quyidagi tengliklar o'rinlidir.

$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n = a \pm b$;

$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = a \cdot b$;

$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b}$ $(\lim y_n = b \neq 0$

Xulosa: Xulosa qilib aytganda, sonli ketma-ketlik va uning limiti matematikada muhim tushuncha bo'lib, u ko'plab nazariy va amaliy masalalarda qo'llaniladiBu tushuncha, matematik analizning asosiy poydevorlaridan biri bo'lib, o'qitish va o'rganishda muhim ahamiyatga ega. Sonli ketma-ketlikni tushunish, matematik fikrlashni rivojlantirishda va murakkab masalalarni hal qilishda muhim vosita hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. T.So'fiyev "Maktabda matematik analiz elementlari". Toshkent. "O'qituvchi" 1983.

ISSN 3060-4567

2. Rasulov N.P., Safarov I.I., Muxitdinov R.T. Oliy matematika. Toshkent, 2012.

3. Mardanova F.Ya. Matematika fani olimpiadalarida tayyorlash bo’yicha uslubiy

k

4. Понтрягин Л.С. Математический анализ для школьников. –М.: Наука,

’

5. "Mathematical Analysis" - Tom M. Apostol, 1974.

6. "Calculus: Early Transcendentals" - Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis,

2002.

t
m
a
l
a
r
.

S
c
i
e
n
c
e
a
n
d
E
d
u
c
a
t
i