ANIQ INTEGRAL VA UNI HISOBLASH

Patiydinov Ilhomjon

Andijon Davlat Universiteti matematika va mehanika fakulteti matematika yo'nalishi 4M4 guruh talabasi

***Annotatsiya**: Ushbu maqolada aniqmas integral va uning xossalari, aniqmas integralni hisoblash usullari keltirilgan. Shuningdek ushbu maqolada matematik analiz kursida aniqmas integral tushunchasi bilan uzviy bog'liq tushuncha boshlang'ich funksiya tushunchasi ham o'rganilgan.*

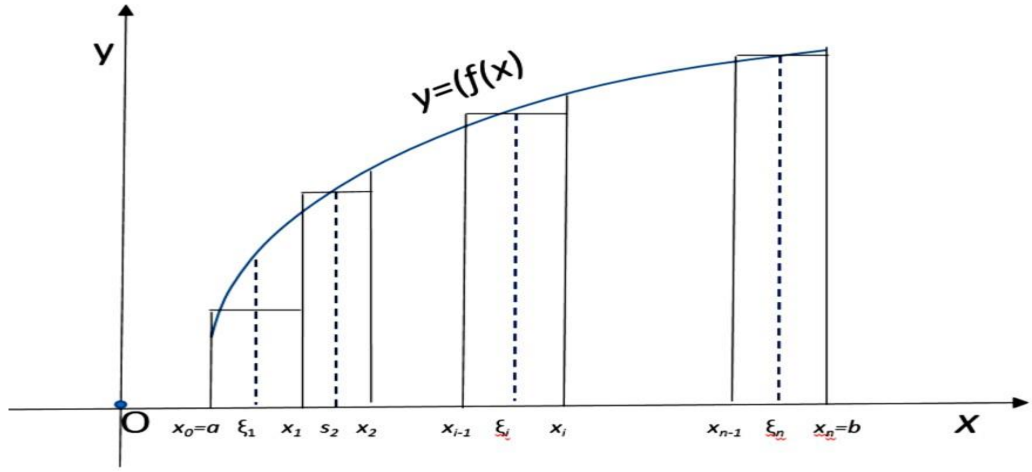
***Kalit so'zlar**: aniq integral, integral yig'indi, limit, Nyuton-Leybnits formulasi.*

Bir qator matematik, fizik, mexanik, iqtisodiy va hokazo masalalarni yechish aniq integral tushunchasini kiritishga va uni o'rganishga olib keladi. Masalan, geometriyada egri chiziqli trapetsiyani yuzasini topish, fizikada o'zgaruvchan kuch bajargan ishni hisoblash, iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini aniqlash kabi masalalar shular jumlasidandir. Quyida bu masalalardan biri bilan tanishamiz.

<u>Egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash masalasi</u>. Aytaylik $y=f(x)$ uzluksiz funksiya grafigi, $x=a$ *va* $x=b$ vertikal to'g'ri chiziqlar hamda

Ox o'qi bilan chegaralangan geometrik shaklning yuzini topish kerak bo'lsin(*1-chizma*). Uni S_{aABb} deb belgilaymiz. Uni topish uchun $[a, b]$ kesmani $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{n-1}$ bo'lgan ixtiyoriy $n-1$ ta nuqtalar bilan bo'laklarga ajratamiz. Bu nuqtalarga $a=x_0$ *va* $b=x_n$ nuqtalarni birlashtirsak, $[a, b]$ kesma ular orqali

ISSN 3060-4567



1-chizma

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ lardan iborat n ta kichik kesmachalarga ajraladi. So'ngra x_i, $i=1,2,\ldots,n-1$ bo'linish nuqtalaridan *Oy* o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, berilgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyani n ta kichik egri chiziqli trapetsiyachalarga ajratamiz. Bunda *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasi n ta kichik egri chiziqli trapetsiyachalarning yuzalari yig'indisiga teng bo'ladi. Agar biz asosi

$[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,3,\ldots, n)$ bo'lgan egri chiziqli kichik trapetsiyachalarning yuzalarini ΔS_i deb belgilasak, u holda quyidagi yig'indi o'rinli bo'ladi:

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\ldots+\Delta S_{i+\ldots}+\Delta S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \qquad (1)$$

Bu yerda ham $\Delta S_i (i=1,2,\ldots n)$ egri chiziqli trapetsiyachalarning yuzalari bo'lgani uchun ularning aniq qiymatlarini topa olmaymiz. Bu yuzalarning taqribiy qiymatini aniqlash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,3,\ldots, n)$ kesmachalarning har birida ixtiyoriy usulda ξ_i nuqtlarni tanlab olamiz va bu nuqtalardagi funksiyaning $f(\xi_i)$ qiymatlarini topamiz. Endi har bir ΔS_i $(i=1,2,3,\ldots, n)$ yuzachalarni asoslari $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ va balandliklari $h_i=f(\xi_i)>0$ bo'lgan to'g'ri

to'rtburchaklarning yuzalari bilan almashtirib quyidagi yig'indini hosil qilamiz:

$$S=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_i)\Delta x_i+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_1 \qquad (2)$$

(2) taqribiy tenglik geometrik jihatdan biz hozircha xisoblay olmaydigan egri chiziqli trapetsiyning S yuzasini to'g'ri to'rtburchklardan xosil qilingan pog'onasimon shakl yuzasi bilan almashtirilganini bildiradi. Bunda bo'laklar soni

ISSN 3060-4567

n qanchalik katta bo'lsa, pog'onasimon shaklning yuzasi egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini shunchalik darajada aniqroq ifodalaydi. Bundan izlanayotgan S yuzaning aniq qiymati

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\Delta x_i \qquad (3)$$

limit bilan aniqanishi kelib chiqadi.

Huddi shunday o'zgaruvchan kuch bajargan ishni hisoblash, ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini topish kabi masalalar ham *(3)*

ko'rinishdagi limitni hisoblashga keltiriladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kemada aniqlangan bo'lsin. Bu kesmani ixtiyoriy

$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

nuqtalar yordamida n ta $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, … , $[x_{i-1}, x_i]$, … ,$[x_{n-1}, x_n]$ kichik kesmachalarga ajratamiz va xosil bo'lgan xar bir $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,3,\ldots,n)$ kichik kesmachalardan ixtiyoriy ξ_i nuqtani tanlaymiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda berilgan $f(x)$ funksiyaning $f(\xi_i)$ $(i=1,2,3,\ldots, n)$ qiymatlarini va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$ $(i=1,2,3,\ldots, n)$ uzunliklarini hisoblaymiz. Bulardan foydalanib quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\Delta x_i \qquad (4)$$

Ta'rif. *(4)* tenglik bilan aniqlanadigan $S_n(f)$ yig'indi $y=f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesma bo'yicha tuzilgan integral yig'indi deyiladi.

Ta'rif. Agar $[a, b]$ kesma $\max \Delta x_i \to 0$ shartni qanoatlantiradigan har qanday bo'lakchalarga ajratilganda va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmada ξ_i nuqtani ixtiyoriy tanlab olinganda

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\Delta x_i$$

integral yig'indi birgina S limitga intilsa, u holda bu limit $[a, b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning aniq integrali deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi yoziladi. Demak, ta'rifga asosan

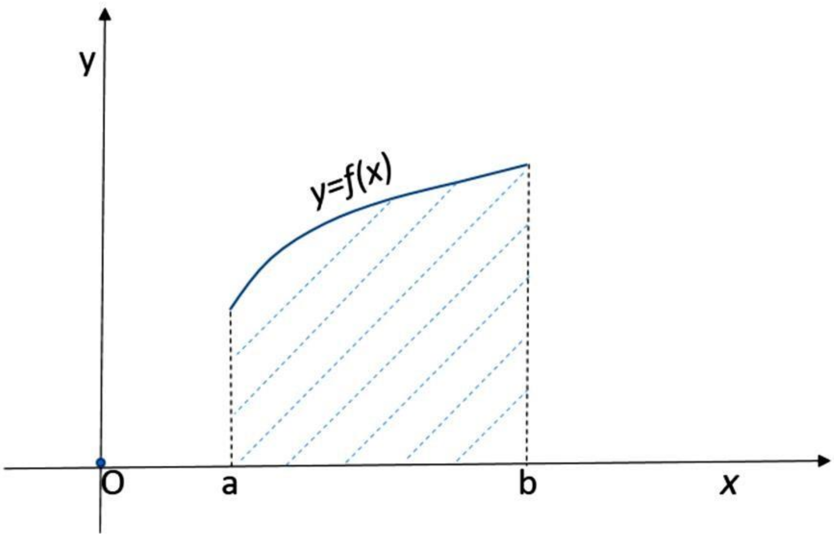
$$\lim_{\max \Delta x i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (5)$$

a integralning quyi chegarasi, b integralning yuqori chegarasi deyiladi. $[a, b]$ kesma integrallash kesmasi, x integrallash o'zgaruvchisi deyiladi.

Ta'rif. Agar *f(x)* funksiya uchun *(5)* limit mavjud bo'lsa, u holda funksiyani $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi deyiladi. Agar $f(x)\geq 0$ bo'lganda

$$\int_a^b \mathrm{f(x)dx}$$

integralning son qiymati *f(x)* egri chiziq, $x=a$ *va* $x=b$ to'g'ri chiziqlar hamda *Ox* o'q bilan chegarlangan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo'ladi(*2-chizma*).



2-chizma

Aniq integralni uning ta'rifi, ya'ni integral yig'indining limiti orqali topish masalasi ancha murakkab hisoblashlarga olib keladi. Shu sababli aniq integralni hisoblashning qulayroq, osonroq topish masalasi paydo bo'ladi. Bu masala integral hisobning asosiy formulasi hisoblangan NyutonLeybnits formulasi yordamida quyidagi teorema bilan hal qilingan.

Teorema. Agar *F(x)* uzluksiz bo'lgan *f(x)* funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$\int_a^b \mathrm{f(x)dx} = F(x)\,|^{\mathrm{b}}_{\mathrm{a}} = F(b) - F(a) \qquad (6)$$

Bu tenglik aniq integralni hisoblashning **Nyuton-Leybnits formulasi** deyiladi.

Ba’zi bir aniq integrallarni to’g’ridan to’gri Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash murakkabroq bo’lishi mumkin. Bunday hollarda bo’laklab integrallash formulasidan yoki o’zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanish mumkin.

Xulosa: Xulosa qilib aytganda, aniq integral matematikada muhim tushuncha bo'lib, u ko'plab nazariy va amaliy masalalarda qo'llaniladi. Bu tushuncha, matematik analizning asosiy poydevorlaridan biri bo'lib, o'qitish va o'rganishda muhim ahamiyatga ega. Aniq integralni tushunish, matematik fikrlashni rivojlantirishda va murakkab masalalarni hal qilishda muhim vosita hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. T.So’fiyev “Maktabda matematik analiz elementlari”. Toshkent. “O’qituvchi” 1983.
2. Axlimirzayev A., Abdullayeva N. “Umumiy o’rta ta’lim maktablarida matematik analiz elementlarini o’qitish bo’yicha ba’zi bir mulohazalar”. “Innovatsiya: Fan, ta’lim, texnologiya” ilmiy-uslubiy maqolalar to’plami, Andijon, 2020 yil, 1-son, 7-12-betlar.
3. Rasulov N.P., Safarov I.I., Muxitdinov R.T. Oliy matematika. Toshkent, 2012.
i
s“O’qituvchi”, 1984. 606-b.
5k. "Mathematical Analysis" - Tom M. Apostol, 1974.
u
n
o
v

N
.
S
.
D