IRRATSIONAL TENGLAMALAR VA ULARNI YECHISH USULLARI

Otajonova Zulxumor
Andijon davlat universiteti
Matematika va mexanika fakulteti
Matematika yo'nalishi 4M2-guruh talabasi

Annotatsiya: *Matematika va algebra sohalarida tenglamalar muammolarini yechishda ko'plab xilma-xil yondoshuvlar mavjud. Shu jumladan, irratsional tenglamalar, ya'ni ildiz ostidagi o'zgaruvchilarni o'z ichiga olgan tenglamalar, ayniqsa muhim ahamiyatga ega. Irratsional tenglamalar ko'pincha matematik modellashtirish, fizikaviy va muhandislik muammolarida uchraydi. Ularni yechish esa ko'p hollarda murakkab va maxsus usullarni talab qiladi. Ushbu maqolada irratsional tenglamalar va ularni yechish usullari haqida so'z yuritamiz.*

Kalit so'zlar: *irratsional tenglama, tenglama yechish, kvadratga oshirish, yechim, ildiz ostidagi ifodalar, algebraik usul.*

Irratsional tenglamalar

Ta'rif. Nomalum qatnashgan ifodalari ildiz belgisi ostida bo'lgan tenglamalar irratsional tenglamalar deyiladi.

Masalan,

$$\sqrt{2x-5}=7, \qquad 2\sqrt{x+5}=8, \qquad \sqrt[3]{x+3}=-1-x,$$

$$\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x},$$

tenglamalar irratsional tenglamalardir.

Ko'p hollarda irratsional tenglamalar, o'zining natijasi bo'lgan ratsional tenglamalarga keltirib yechiladi. Irratsional tenglamani ratsional tenglamaga

ISSN 3060-4567

keltirish uchun berilgan tenglamaning ikki tomonini bir yoki bir necha marta biror darajaga ko‘tarish kerak bo‘ladi.

Ammo tenglikning ikki tomonini darajaga ko‘tarish natijasida chet ildizlar hosil bo‘lishi mumkin. Buni quyidagi teorema tasdiqlaydi.

Teorema. $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko’tarishdan hosil bo’lgan $f_1^2(x) = f_2^2(x)$ tenglamaning ildizlari $f_1(x) = f_2(x)$ va $f_1(x) = -f_2(x)$ tenglamalarning ildizlaridan iborat bo’ladi.

Isbot. $f_1^2(x) = f_2^2(x)$ tenglama $f_1^2(x) - f_2^2(x) = 0$ yoki $(f_1(x) - f_2(x))(f_1(x) + f_2(x)) = 0$ tenglama bilan teng kuchlidir.Ammo keyingi tenglama faqat $f_1(x) = f_2(x)$ va $f_1(x) = -f_2(x)$ tengliklarning eng kamida biri bajarilgandagina o’rinli bo’ladi.

Teorema isbotlandi.

Bu isbotlangan teoremadan $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamadan ${f_1}^2(x) = {f_2}^2(x)$ tenglamaga o’tishda ildizlar yo’qolishi ro’y bermaydi, lekin chet ildizlar hosil bo’lishi mumkinligi kelib chiqadi. $f_1(x) = -f_2(x)$ tenglama $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamaga **qo’shma tenglama** deyiladi.

Agar $f_1(x) = -f_2(x)$ tenglama ildizga ega bo’lmasa, u holda ma’lumki chet ildizlar bo’lmaydi.

Masalan, $2x = 3$tenglamaning ikki tomonini kvadratga ko’tarishdan hosil bo’lgan $4x^2 = 9$ yoki $4x^2 - 9 = 0$ tenglama $2x - 3 = 0$, $2x + 3 = 0$ tenglamalarga teng kuchli bo’lad. Bulardan $2x - 3 = 0$ berilgan tenglamaga teng kuchli bo’lib, $2x + 3 = 0$ unga qo’shma bo’ladi. Keying tenglamaning ildizlaridan $x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ berilgan tenglamani qanoatlantiradi, $x = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$ esa berilgan tenglamaga chet ildiz hisoblanadi.

Irratsional tenglamada birgina ildiz qatnashsa, bu ildizni tenglamaning bir tomonida qoldirib, tenglamaning qolgan hadlarini ikkinchi tomonga o‘tkazamiz. Keyin esa tenglamaning ikki tomonini tenglama ildizidan qutiladigan qilib, biror darajaga ko‘taramiz. Natijada ratsional tenglama hosil bo‘ladi. Bu hosil bo‘lgan tenglamani yechib, uning ildizlarini berilgan irratsional tenglamaga qo‘yib tekshirib ko‘rish kerak. Agar topilgan ildizlardan birortasi berilgan tenglamani qanoatlantirmasa, u chet ildiz hisoblanadi.

Irratsional tenglamalarni yechish usullari:

1. $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ko’rinishdagitenglama quyidagi teng kuchli sistemaga o’tiladi va yechiladi:

$$\begin{cases} g(x \geq 0) \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

1-misol. $3\sqrt{x} - 7 = 5$ tenglamani yeching.

Yechish:

1. Tenglamani aniqlanish sohasini topamiz: $x \geq 0$
2. $3\sqrt{x} - 7 = 5, \Longrightarrow 3\sqrt{x} = 7 + 5, \Longrightarrow\ 3\sqrt{x} = 12, \Longrightarrow\ \sqrt{x} = 4$

temglamani ikki tomonini kvadratga ko’tarsak, $x = 16$.

3. Tekshirish: $3\sqrt{16} - 7 = 3 \cdot 4 - 7 = 5$.

Demak, $x = 16$ berilgan irratsional tenglamani qanoatlantirar ekan.

Javob:$x = 16$.

2-misol. $\sqrt{3x^2 - 6x + 16} = 2x - 1$ tenglamani yeching.

Yechish:

1. $\sqrt{3x^2 - 6x + 16} = 2x - 1$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 16 = (2x - 1)^2 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 16 = 4x^2 - 4x + 1 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 15 = 0 \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2. $x^2 + 2x - 15 = 0$ tenglamani yechamiz.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}, \Longrightarrow\ x_1 = 3, x_2 = -5$$

3. $x \geq \frac{1}{2}$ bo’lganligi sababli tenglamaning yechimi $x = 3$

4. Tekshirish: $\sqrt{3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 16} = 2 \cdot 3 - 1, \sqrt{25} = 5$

Javob:$x = 3$.

2. $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$ ko'rinishdagi tenglamani yechishda chap tarafdagi ko'paytmaning hech bo'lmasa bitta ko'paytuvchisi nolga teng bo'lishi kerakligi inobatga olinadi va tenglama quyidagi sistemaga keltiriladi:

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

3-misol. $(x^2 - 25)\sqrt{6 - 2x} = 0$ tenglamani yeching.

Yechish:

$$\begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ 6 - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 5 \\ x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -5, x_2 = 3$$

Javob: $x_1 = -5, x_2 = 3$

3. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ ko'rinishdagi tenglamani yechishda quyidagi sistemalardan biriga keltiriladi:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

4-misol. $\sqrt{x + 1} = \sqrt{2x - 3}$ tenglamani yeching.

Yechish:

$$\begin{cases} x + 1 = 2x - 3 \\ 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x \geq 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

Javob: $x = 4$.

4. $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = 0$ ko'rinishdagi tenglamani yechishda quyidagi sistemalardan biriga keltiriladi:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Ayrim misollarni yechishda tenglamada qatnashayotgan funksiyaning aniqlanish sohasini bilish, tenglamaning yechimi mavjud yoki mavjud emasligini bilishga yoki yechimini topishga yordam beradi.

5. $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = V(x)$ ko'rinishdagi tenglamalar quyidagicha yechiladi:

$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = V(x)$ ikkala tarafni kub darajaga ko'taramiz

$$f(x)+3\cdot\sqrt[3]{f^2(x)g(x)}+3\cdot\sqrt[3]{f(x)g^2(x)}+g(x)=V^3(x)$$

Guruhlab olamiz va qavsdan tashqariga umumiy ko'paytuvchini chiqarib yozib olamiz:

$$f(x)+g(x)+3\cdot\sqrt[3]{f(x)g(x)}\left(\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}\right)=V^3(x)\ \ (1)$$

$$f(x)+g(x)+3\cdot\sqrt[3]{f(x)g(x)}V(x)=V^3(x)\ \ (2)$$

(1) dan (2) ga o'tish teng kuchli o'tish emas shuning uchun bir qator tekshirib qo'yish kerak bo'ladi

5-misol. $\sqrt[3]{x+45}+\sqrt[3]{x-16}=1$ tenglamani yeching.

Yechish:

1. Tenglamani aniqlanish sohasini topamiz: $x\in R$.
2. Berilgan tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$(\sqrt[3]{x+45}+\sqrt[3]{x-16})^3=1^3$$

$$x+45-3\cdot\sqrt[3]{x+45}\sqrt[3]{x-16}\left(\sqrt[3]{x+45}+\sqrt[3]{x-16}\right)-(x-16)=1$$

$\sqrt[3]{x+45}\cdot\sqrt[3]{x-16}=20$ tenglama hosil bo'ladi.

3. $\sqrt[3]{x+45}\cdot\sqrt[3]{x-16}=20$ tenglamani yana kubga ko'tarsak:

$(x+45)(x-16)=8000$ yoki $x^2+29x-8720=0.$

Bu tenglaman yechib,

$$x_1=80\,,x_2=-109$$

Ushbu ildizlar tenglamaning aniqlanish sohasiga tegishli.

Javob: $x_1=80\,,x_2=-109$

Xulosa

Irratsional tenglamalar matematikada noaniq yoki murakkab yechimlarni talab qiladigan, ildiz ostidagi ifodalarni o'z ichiga olgan tenglamalardir. Ular ko'pincha algebraik yoki geometriyadagi o'zgarishlarni talab qiladi. Irratsional tenglamalarni yechish usullari turlicha bo'lib, ularning har biri tenglama turiga qarab tanlanadi. Eng ko'p ishlatiladigan usullar orasida ildizni yo'qotish, kvadratga yoki kubga oshirish va ikki tomonni ham bir xil ifodaga ko'paytirish kabilar mavjud.

ISSN 3060-4567

Irratsional tenglamalarni yechishda, avvalo, tenglamaning har ikki tomonini bir xil ildiz ostiga keltirish yoki ildizlarni qisqartirish orqali oddiylashtirish muhimdir. Ba'zi hollarda, kvadratga oshirish yoki yuqori darajali ildizlarni tekshirish orqali aniq yechimlar topiladi. Shuningdek, hisoblashda ehtiyotkorlik zarur, chunki ba'zi hollarda bu yechimlar xatoliklar yoki noto'g'ri ildizlar keltirib chiqarishi mumkin. Shu sababli, irratsional tenglamalarni yechishda, aniqlik va ehtiyotkorlik zarurdir.

Shu bilan birga, irratsional tenglamalarning yechish jarayoni matematik yondoshuvlarni, hisoblashning samarali usullarini va analitik metodlarni talab qiladi. Ma'lum bir tenglama turiga qarab, mos usullarni qo'llash, muammoning yechimini aniq va tez topishga yordam beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Nishonov T.S. Professional approach to teaching of elements of probability theory for students of economics. Наука и образование сегодня № 12 (59), 2020. 85-87 pp.

2. Ахлимирзаев А., Нишонов Т.С. Роль и значение практическо-профессионального подхода обучения теории вероятностей и математической статистики в подготовке будущих экономистов // Universum: психология и образование : электрон. научн. журн. 2021. 2(80). 12-17 с.

3. Sh.O. Alimov va boshqalar.. “Algebra” 9-sinf uchun darslik.-T.: “O’qituvchi” nashriyot matbaa ijodiy uyi, 2009-yil.

4.Adilbek Zaitov va boshqalar.. 10-sinf Algebra va analiz asoslari [Matn]: darslik / − Toshkent: Respublika ta’lim markazi, 2022-yil. − 192 b.

5. Jo‘rayev T., Sadullayev A., Hudoyberganov G., Mansurov A., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. 1-qism. O‘zbekiston, Toshkent, 1995.