ISSN 3060-4567

GEOMETRIK PROGRESSIYA

Usmonova Mubina

Andijon davlat universiteti

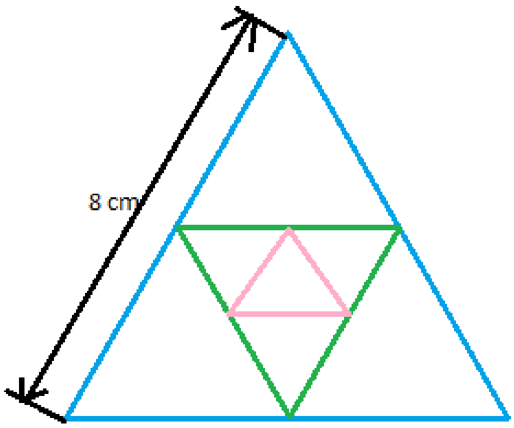
Matematika va mexanika fakulteti

Matematika yo'nalishi 4M2-guruh talabasi

Annotatsiya: *Geometrik progressiya - bu matematikada muhim o'rin tutadigan va keng qo'llaniladigan sonlar ketma-ketligidir. Geometrik progressiyada har bir keyingi element avvalgisining bir doimiy koeffitsienti (odatda q deb belgilangan) bilan ko'paytiriladi. Bu koeffitsient progressiyaning "qadami" deb ataladi. Geometrik progressiyaning xususiyatlari va formulalari nafaqat matematika fanida, balki iqtisodiyot, biologiya, fizika va boshqa sohalarda ham keng qo'llaniladi. Misol uchun, aholi sonining o'sishi, kapitalning foiz orqali ko'payishi yoki viruslarning tarqalishi kabi hodisalar geometrik progressiya asosida modellanishi mumkin. Ushbu maqolada geometrik progressiyaning ta'rifi, asosiy xususiyatlari va amaliy qo'llanilishi haqida so'z yuritamiz.*

Kalit so'zlar: *progressiya, geometrik progressiya, progressiya maxraji, rekurrent, progressiya yig'indisi.*

Tomoni 8 cm ga teng bo'lgan teng tomonli muntazam uchburchakni qaraylik. Uchlari berilgan uhburchak tomonlarining o'rtalaridan iborat bo'lgan uchburchak yasaymiz (1-rasm). Uchburchak o'rta chizig'ining xossasiga o'ra ikkinchi uchburchakning tomoni 4 cm ga teng. Shunga o'xshash davom ettirib, tomonlari $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\ cm$ va hakozo bo'lgan uchburchaklarni hosil qilamiz.



1-rasm.

Shu uchburchaklar tomonlarining uzunliklari ketma-ketligini yozib chiqamiz:

$$8,4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots .$$

Bu ketma-ketlikda, ikkinchisidan boshlab, uning har bir hadi avvalgi hadni ayni bir xil $\frac{1}{2}$ songa ko'paytirilganiga teng. Bunday ketma-ketliklar *geometrik progressiyalar* deyiladi.

Ta'rif. Agar

$$b_1, b_2, b_3, \dots\ b_n, \dots$$

sonli ketma-ketlikda barcha natural *n* uchun

$$b_{n+1} = b_n q$$

tenglik bajarilsa, bunday ketma-ketlik geometric progressiya deyiladi, bunda $b_n \neq 0$, $q -$ biror nolga teng bo'lmagan biror son.

Bu formuladan

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$$

ekanligi kelib chiqadi. q son *geometrik progressiyaning maxraji* deyiladi.

Misollar.

1) $2,8,32,128,\dots$ - maxraji $q = 4$ bo'lgan geometrik progressiya;
2) $1,\frac{2}{3},\frac{4}{9},\frac{8}{27},\dots$ - maxraji $q = \frac{2}{3}$ bo'lgan geometrik progressiya;
3) $7,7,7,\dots$ maxraji $q = 1$ bo'lgan geometrik progressiya;

1- Masala. $b_n = 7^{2n}$ formula bilan berilgan ketma-ketlik geometric progressiya bo'lishini isbotlang.

Barcha n larda $b_n = 7^{2n} \neq 0$ ekanligini ta'kidlab o'tamiz. $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ bo'linma barcha

n lar uchun n ga bog'liq bo'lmagan ayni bir xil songa tengligini isbotlash talab qilinadi. Haqiqatdan ham,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 49,$$

ya'ni, . $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ bo'linma n ga bog'liq emas.

Geometrik progressiya ta'rifiga ko'ra

$$b_{n+1} = b_n q, b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$$

Bundan esa quyidagi ifoda kelib chiqadi.

$$b_n{}^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \qquad n > 1$$

Agar progressiyaning barcha hadlari musbat bo'lsa, u holda $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$ bo'ladi, ya'ni geometrik progressiyaning ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi unga qo'shni bo'lgan ikkita handing o'rta geometrigiga teng. "Geometrik " progressiya degan nom ham shundan kelib chiqqan.

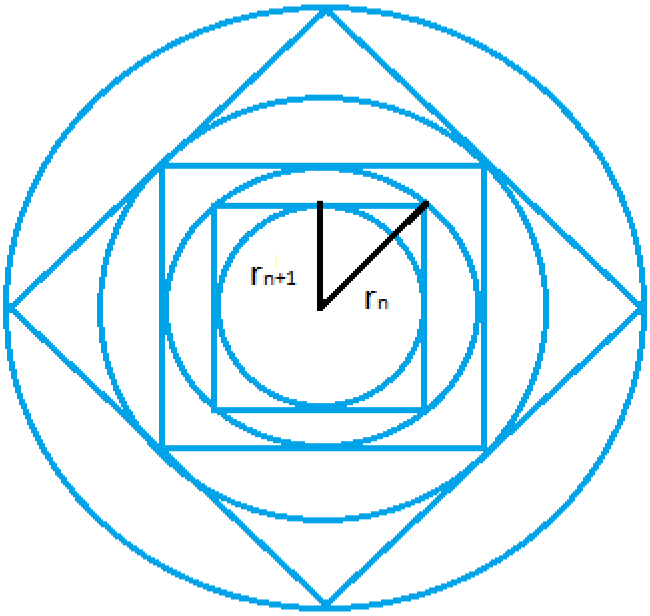
Agar b_1 va q berilgan bo'lsa, u holda geometric progressiyaning qolgan hadlarini $b_{n+1} = b_n q$ rekurrent formula bilan hisoblash mumkin. Biroq, n kata bo'lganda bu ko'p mehnat talab qiladi. Odatda n-hadning formulasidan foydalaniladi. Uning formulasi quyidagicha:

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Ushbu formula geometrik progressiya *n-hadi formulasi* deyiladi.

2-Masala. Aylanaga kvadrat ichki chizilgan, unga esa ikkinchi aylana ichki chizilgan. Ikkinchi aylanaga ikkinchi kvadrat ichki chizilgan, unga esa uchinchi aylana ichki chizilgan va hakozo (2-rasm). Aylanalarning radiuslari geometrik progressiya tashkil qilishini isbotlang.

ISSN 3060-4567



2-rasm.

n-aylananing radiusi r_n bo'lsin. U holda pifagor teoremasiga ko'ra

$$r^2{}_{n+1} + r^2{}_{n+1} = r^2{}_n$$

Bundan esa quyidagi kelib chiqadi:

$$r^2{}_{n+1} = \frac{1}{2} r^2{}_n$$

Ya'ni

$$r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n$$

Demak, aylanalar radiuslarining ketma-ketligi maxraji $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bo'lgan geometrik progressiya hosil qiladi.

3-Masala. $b_1 = 81$ va $q = \frac{1}{3}$ bo'lsa, geometrik progressiyaning yettinchi hadini toping.

Yuqorida keltirilgan formulaga ko'ra:

$$b_7 = 81 \cdot \frac{1}{3}^{(7-1)} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}.$$

4-masala. Ushbu yig'indini qiymatini hisoblang:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$$

Tenglikni ikkala qismini 3 ga ko'paytiramiz:

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6$$

ISSN 3060-4567

Oxirgi ikkita tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5)$$

$$3S = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6$$

Qavslarni ichidagi ifodalar bir xil ekanidan, pastdagi tenglikdan yuqoridagi tenglikni ayirib quyidagini hosil qilamiz:

$$3S - S = 3^6 - 1, \qquad 2S = 3^6 - 1$$

$$S = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364$$

Endi maxraji $q \neq 1$ bo'lgan ixtiyoriy $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, \ldots$ geometrik progressiyani qaraymiz. $S_n -$ shu progressiyaning dastlabki n ta hadi yig'indisi bo'lsin:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}$$

Teorema. Maxraji $q \neq 1$ bo'lgan geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadining yig'indisi quyidagiga teng:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Isbot.

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}$$

Ushbu tenglikning ikkala qismini q ga ko'paytiramiz:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^n$$

Oxirgi ikkita tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$S_n = b_1 + (b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1})$$

$$qS_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1}) + b_1q^n$$

Qavslarni ichidagi ifodalar teng ekanligini hisobga olib, yuqoridagi tenglikdan pastdagi tenglikni ayirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n$$

Bundan esa,

$S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n)$, $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

ISSN 3060-4567

5-masala. Geometrik progressiyaning dastlabki *n* ta hadining yig'indisi -93 ga teng. Bu progressiyaning birinchi hadi -3 ga va maxraji esa 2 ga teng bo'lsa*, n* ni toping.

Progressiyan n ta hadining yig'indisini toppish formulasidan,

$$-93 = \frac{-3(1-2^n)}{1-2}$$

$$-31 = 1 - 2^n$$

$$2^n = 32$$

$$n = 5.$$

Xulosa. Geometrik progressiya matematikada va amaliyotda juda muhim tushuncha bo'lib, uning xususiyatlari ko'plab sohalarda, jumladan, iqtisodiyot, biologiya, fizika va boshqa fanlarda keng qo'llaniladi. Geometrik progressiyada har bir element avvalgisining doimiy koeffitsienti bilan ko'paytirilishi, uning o'zgarishining ko'rsatkichli xarakterini ta'kidlaydi. Bu xususiyat o'zgarishlarning tez yoki sekin bo'lishini modellashtirishda muhim ahamiyatga ega. Shunday qilib, geometrik progressiya matematik model sifatida o'zgarishlarning dinamikasini tushunishda va tushuntirishda muhim vosita bo'lib, uning amaliyotdagi qo'llanilishi har bir sohada yangi imkoniyatlarni yaratadi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Nishonov T.S. Professional approach to teaching of elements of probability theory for students of economics. Наука и образование сегодня № 12 (59), 2020. 85-87 pp.

2. Ахлимирзаев А., Нишонов Т.С. Роль и значение практическо-профессионального подхода обучения теории вероятностей и математической статистики в подготовке будущих экономистов // Universum: психология и образование : электрон. научн. журн. 2021. 2(80). 12-17 с.

3. Sh.O. Alimov va boshqalar.. "Algebra" 9-sinf uchun darslik.-T.: "O'qituvchi" nashriyot matbaa ijodiy uyi, 2009-yil.

ISSN 3060-4567

4.Adilbek Zaitov va boshqalar.. 10-sinf Algebra va analiz asoslari [Matn]: darslik / − Toshkent: Respublika ta’lim markazi, 2022-yil. − 192 b.