XUSUSIY HOSILALI UCH O‘ZGARUVCHILI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI

Xolmanova Klara
O‘zMU Jizzax filiali "Amaliy matematika"
kafedrasi o'qituvchisi
klaraxolmanova97@gmail.com
O‘zMU Jizzax filiali "Amaliy matematika"
fakulteti talabalari
G‘aniyeva Charos, Nazarov Jamshid,
Tog‘ayev G‘afur, Salayeva Muazzam

Annotatsiya: *Matematik tahlil va amaliy fanlarda xususiy hosilali differensial tenglamalar (XHDT) muhim o‘rin tutadi. Xususan, uch o‘zgaruvchili XHDTlar, ya'ni u(x,y,z) kabi funksiyalarni aniqlashga qaratilgan masalalar ilmiy izlanishlarda va texnik muammolarni hal qilishda asosiy vosita hisoblanadi. Ushbu maqolada uch o‘zgaruvchili XHDTlarni yechishning asosiy usullari, ularning zamonaviy rivoji va qo‘llanilish sohalari keng tahlil qilinadi.*

Kalit so'zlar: *Xususiy hosilali differensial tenglamalar, giperbolik tenglamalar, parabolik tenglamalar, elliptik tenglamalar, ajratilgan o‘zgaruvchilar usuli, Fourier qatorlari va integral usullari, numerik usullar, variatsion usullar.*

Xususiy hosilali differensial tenglamalar uch o‘zgaruvchili funksiyalar va ularning hosilalari orqali ifodalanadi. Umumiy ko‘rinish:

$$F\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) = 0$$

bu yerda x,y, z — mustaqil o‘zgaruvchilar, u=u(x,y,z) — noma'lum funksiya.

Tenglamalar turli fizik jarayonlarni modellashtirishda qo‘llanilib, ularni quyidagi asosiy uch turga ajratish mumkin:

1. **Giperbolik tenglamalar:** To‘lqinlarning tarqalishi, akustika va elektromagnit maydonlar modellarida uchraydi. Misol uchun to‘lqin tenglamasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2$$

2. **Parabolik tenglamalar:** Issiqlik o‘tkazish va diffuziya jarayonlarini tasvirlash uchun qo‘llaniladi. Misol keltiradigan bo‘lsak, issiqlik o‘tkazish tenglamasi: $\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u$

3. **Elliptik tenglamalar:** Statik holatlar va muvozanatni ifodalashda ishlatiladi. Masalan, Laplas tenglamasi: $\nabla^2 u = 0$

Yuqoridagi tenglamalarni yechishni qulay usullarini ko‘rib chiqaylik

1. Ajratilgan o‘zgaruvchilar usuli

Ajratilgan o‘zgaruvchilar usuli eng sodda va samarali usullardan biri bo‘lib, tenglamani uchta mustaqil o‘zgaruvchi bo‘yicha ajratishdan iborat. Funksiya quyidagi shaklda ifodalanadi:

$u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$

Bu usul yordamida har bir o‘zgaruvchi uchun alohida oddiy differensial tenglamalar olinadi va ular mustaqil ravishda yechiladi.

Qo‘llanilish sohalari:

- To‘lqinlarning tarqalishi, masalan, ovoz va elektromagnit signallar.
- Issiqlik tarqalishi.

Misol:

To‘lqin tenglamasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

uchun ajratilgan shaklda yechim quyidagicha:

$u(x,y,z)=T(t)\Phi(x,y)$

2. Fourier qatorlari va integral usullari

Fourier usullari XHDTni chegaraviy shartlar bilan yechishda keng qo‘llaniladi. Funksiya Fourier qatorlari yoki Fourier integrali yordamida ifodalanadi va natijada har bir chastota uchun alohida differensial tenglama hosil qilinadi.

Qo‘llanilish sohalari:

- Issiqlik o‘tkazish va tarqalish masalalari.
- Akustik rezonans muammolari.

Misol:

Issiqlik o‘tkazish tenglamasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u$$

uchun Fourier qatorlarida yechim:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n t}\,\phi_n(x)$$

3. Numerik usullar

Numerik usullar yuqori murakkablikdagi tenglamalar uchun ishlatiladi. Ushbu yondashuvlar matematik modellarni kompyuterda amalga oshirishga imkon beradi. Eng ko‘p ishlatiladigan usullar:

- **Cheklangan farqlar usuli (FDM):** Funksiya va uning hosilalari cheklangan qiymatlar bilan yaqinlashtiriladi.
- **Cheklangan elementlar usuli (FEM):** Muammo sohasini kichik elementlarga ajratib, har bir element uchun tenglama yechiladi.
- **Spektral usullar:** Funktsiyalarni trigonometrik yoki polinomial qatorlarga ajratib, yaqinlashtirish.

Qo‘llanilish sohalari:

- Murakkab muhandislik hisoblashlari.
- Aerodinamika va gidrodinamika modellarida.

4. Variatsion usullar

Bu usul energiya prinsiplariga asoslangan. Funksional minimallashtiriladi va unga mos differensial tenglama hosil qilinadi. Ushbu usul mexanika va fizik masalalarda samarali.

Misol: Elastiklik nazariyasida ishlatiladi.

5. Simmetriya yondashuvi

Tenglamaning invariantligi va simmetriyasidan foydalanish orqali tenglama soddalashtiriladi. Ushbu usul analitik yechimlarni topishda qo‘llaniladi.

Zamonaviy yondashuvlar

So‘nggi yillarda XHDTlarni yechishda sun’iy intellekt va chuqur o‘rganish texnologiyalari keng qo‘llanilmoqda.

- **Fizika-yordamli neyron tarmoqlar (PINNs):** Differensial tenglamalar va chegaraviy shartlarni sun’iy neyron tarmoqlar ichida integratsiya qiluvchi usul. Ushbu usul klassik va sonli usullarni o‘rnini bosuvchi zamonaviy yechimdir.
- **Data-driven yondashuvlar:** Katta hajmdagi tajriba ma’lumotlarini tahlil qilish orqali differensial tenglamalar uchun parametrlarni aniqlash va ularning yechimini yaqinlashtirish imkonini beradi.

Xulosa

Xususiy hosilali uch o‘zgaruvchili differensial tenglamalar nazariy va amaliy fanlarda hal qiluvchi ahamiyatga ega. Ajratilgan o‘zgaruvchilar usuli oddiy va simmetrik tenglamalarni yechishda asosiy vosita bo‘lsa, Fourier va numerik usullar murakkab jarayonlarni modellashtirishda qo‘llaniladi. Zamonaviy texnologiyalar, xususan, sun’iy intellektning integratsiyasi XHDTlarni yechishda yangi imkoniyatlar yaratmoqda. Ushbu tenglamalarning samarali yechimi fan va texnologiyadagi ko‘plab muammolarni hal qilishga yordam beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.
2. LeVeque, R. J. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Springer, 1992.
3. Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G. E. "Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving differential equations." *Journal of Computational Physics*, 2019.

ISSN 3060-4567

4. Boyce, W. E., DiPrima, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, 2017.

5. Trefethen, L. N. *Spectral Methods in MATLAB*. SIAM, 2000.

6. Courant, R., Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*. Wiley, 1989.

7. Содиков Т. А. и др. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПРИВЕДЕНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ //МОЛОДОЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬ: К ВЕРШИНАМ ПОЗНАНИЯ. – 2023. – С. 7-10.

8. Klara X. et al. MURAKKAB TUZILISHDAGI ARALASH MAKSIMUMLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMALARI UCHUN CHEGARAVIY SHART //Лучшие интеллектуальные исследования. – 2023. – Т. 10. – №. 5. – С. 34-40.