QAVARIQ OPTIMALLASHTIRISH VA UNING QO'LLANISH SOHALARI

Sulaymonova Sitorabonu Sirojiddin qizi
Buxoro davlat universiteti
sulaymonovasitora91@gmail.com

Annotatsiya: Qavariq optimallashtirish - bu amaliy matematika sohasining asosiy yo'nalishi bo'lib, real dunyo muammolarini hal qilishda muhim rol o'ynaydi. Ushbu soha turli sanoat tarmoqlarida, masalan, mashinasozlik, iqtisodiyot, moliya, signalni qayta ishlash va telekommunikatsiya sohalarida keng qo'llaniladi. Ushbu maqolada qavariq optimallashtirishning umumiy ko'rinishi berilib, uning dunyo bo'ylab va O'zbekistondagi qo'llanish sohalariga alohida e'tibor qaratilgan. Ayniqsa, qishloq xo'jaligi, energiya va telekommunikatsiya tarmoqlaridagi qavariq optimallashtirish qo'llanish tarmoqlari keltirilgan. Maqola O'zbekistonda operatsion samaradorlikni oshirish va barqaror rivojlanishni ta'minlashda qavariq optimallashtirishning imkoniyatlarini ko'rsatadi

Kalit so'zlar: Qavariq optimallashtirish, maqsad funksiyasi, qavariq to'plam, qavariq funksiya.

CONVEX OPTIMIZATION AND ITS APPLICATIONS IN DIFFERENT FIELDS

Abstract: Convex optimization is a key area in applied mathematics that plays an important role in solving real-world problems. This field is widely applied across various industries, such as mechanical engineering, economics, finance, signal processing, and telecommunications. This article provides an overview of convex optimization and focuses on its applications both globally and in Uzbekistan. In particular, the article highlights the use of convex optimization in agriculture, energy, and telecommunications sectors. The paper demonstrates the potential of convex optimization to enhance operational efficiency and ensure sustainable development in Uzbekistan.

Keywords: Convex optimization, objective function, convex set, convex function.

Bizga ma'lumki, bir to'plam $C \subset \mathbb{R}^n$ da qavariq bo'lsa, u holda $x, y \in C$ nuqtalar uchun ularni tutashtiruvchi kesma ham shu to'plamga tegishli bo'ladi. Formal tarzda, to'plam C qavariq bo'lsa, har bir $\lambda \in [0,1]$ uchun quyidagi o'rinli:

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C \text{ har qanday } x, y \in C.$$

Bir funksiya $f: R^n \to R$ qavariq bo'lsa, har qanday $x, y \in \mathbb{R}^n$ lar va $\lambda \in [0,1]$ uchun:

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

o'rinli bo'ladi.

Qavariq optimallashtirish muammolari odatda quyidagi shaklda ifodalanadi:

$$\min_{x \in C} f(x),$$

bu yerda $f(x)$ — qavariq funksiya, C — qavariq to‘plam.

Optimallashtirish usullari

Qavariq optimallashtirish muammolarini hal qilishda bir nechta usullar mavjud. Quyida qavariq optimallashtirishning amaliyotda eng ko‘p qo‘llaniladigan to’rt asosiy usulni ko‘rib chiqamiz:

Gradient tushishi

Gradient tushishi (Gradient Decent or GD) — bu takroriy optimallashtirish algoritmi bo‘lib, har bir qadamda funksiyaning gradiyenti (eng keskin tushish yo’nalishi) bo‘yicha yangilanish amalga oshiriladi. Bu metod, ayniqsa, qavariq funksiyalarni minimallashtirishda keng qo‘llaniladi. Bu usulning asosiy g‘oyasi - funksiyaning gradienti bo‘yicha harakatlanib, minimallashtirish nuqtasiga yaqinlashishdan iborat jarayondir [1-4].

Gradient tushishi metodining umumiy formulasi quyidagicha:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

bu yerda:

- x_k- k-chi iteratsiyada nuqta,
- α- o‘qish tezligi (learning rate),
- $\nabla f(x_k)$ - funksiyaning x_k nuqtasidagi gradiyenti.

Gradient tushishning asosiy bosqichlari

1. Dastlabki nuqtani tanlaymiz: x_0.
2. Gradientni hisoblaymiz:$\nabla f(x_k)$.
3. Yangilangan nuqtani hisoblaymiz: $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$.
4. Agar to‘xtash sharti bajarilsa, jarayonni tugatamiz. Aks holda, keyingi bosqichga o‘tamiz.

Misol. 1. *Faraz qilaylik, quyidagi qavariq funksiya berilgan bo‘lsin:*

$$f(x) = x^2 + 4x + 4$$

Bu funksiyaning gradiyentini topamiz:

$$\nabla f(x) = 2x + 4.$$

Endi, Gradient tushish metodini qo‘llab, $x_0 = 0$ dan boshlaymiz. O‘qish tezligini $\alpha = 0.1$ deb belgilaymiz.

1. Dastlabki nuqta: $x_0 = 0$. 2. Birinchi iteratsiyada, gradientni hisoblaymiz:

$$\nabla f(x) = 2(0) + 4.$$

Yangilangan nuqta:

$$x_1 = x_0 - 0.1 \times 4 = 0 - 0.4 = -0.4$$

3. Ikkinchi iteratsiya uchun:

$$\nabla f(x_1) = 2(-0.4) + 4 = 3.2$$

Yangilangan nuqta:

$$x_2 = x_1 - 0.1 \times 3.2 = -0.4 - 0.32 = -0.72$$

4. Uchinchi iteratsiya:

$$\nabla f(x_2) = 2(-0.72) + 4 = 2.56$$

Yangilangan nuqta:

$$x_3 = x_2 - 0.1 \times 2.56 = -0.72 - 0.256 = -0.976$$

Jarayon shu tarzda davom etib, har bir iteratsiyada x_k nuqtasi minimallashtirish nuqtasiga yaqinlasha boshlaydi va jarayon shu tarzda davom etadi.

Natija va xulosa

Gradiyent tushish metodi qavariq funksiyaning minimallashtirishiga olib keladi, lekin o‘qish tezligi (α) ni to‘g‘ri tanlash juda muhimdir. Agar o‘qish tezligi juda katta bo‘lsa, metod konvergensiya qilishda qiyinchiliklarga duch kelishi mumkin. Agar o‘qish tezligi juda kichik bo‘lsa, bunda esa hisoblash jarayoni sekinlashadi.

Bu metoddan qavariq optimallashtirish muammolarida samarali foydalaniladi. Lekin, agar funksiya qavariq bo‘lmasa, ushbu metod global minimumga yetmasligi mumkin.

Ichki nuqtalar usullari

Ichki nuqtalar usullari, optimallashtirish muammolarini chekka nuqtalaridan emas, balki ichki nuqtalaridan yechimga qarab yondashadi.

Qavariq optimallashtirish muammosi quyidagi shaklda berilishi mumkin:

$$\min_x f(x) \quad \text{shunday qilib} \quad g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

Bu yerda, $f(x)$ - maqsad funksiyasi, $g_i(x)$ - cheklovlar, va $h_j(x)$ - tenglik cheklovlari. Ichki nuqtalar metodi bu turdagi optimizatsiya muammolarini yechishda keng qo‘llaniladigan algoritmdir.

Ichki nuqtalar metodi asosan quyidagi asosiy prinsipga asoslanadi:

- **Funksiyalarni yaxshilash**: Boshlang‘ich yechimdan boshlab, ichki nuqtalar usuli optimizatsiya jarayonida yechimga iteratsiyalar orqali yaqinlashib boradi.
- **Cheklov funksiyasi (Barier function)**: yuqoridagi cheklovlarning yengilroq shaklini yaratish uchun, maqsad funksiyasiga barrier funksiyasi qo‘shiladi. Bu barrier funksiyasi yordamida, cheklovlar buzilishi oldini olish uchun maqsadni minimallashtiradigan nuqtalar topiladi.
- **Iteratsiya**: Har bir iteratsiyada yangi yechimni aniqlash uchun gradientga asoslangan usullar qo‘llaniladi. Bu usullar aniq va samarali natijalarga olib keladi.

Matematik formula

Ichki nuqtalar metodining asosiy formulasi quyidagicha:

$$\min_{x}\left(f(x)+\mu\sum_{i=1}^{m}\ln\left(-g_i(x)\right)+\nu\sum_{j=1}^{p}\left(h_j(x)\right)^2\right)$$

Bu yerda:

- μ va ν - parametrlar,
- $g_i(x)$ va $h_j(x)$ - cheklovlar,
- $\ln(-g_i(x))$ - log-cheklov funktsiyasi, bu cheklovlarga nisbatan chegarani ifodalaydi.

Misol. 2. *Keling, ikki o'zgaruvchili va ikkita cheklovli bir funksiyani ko'rib chiqaylik:*

$$\min_{x_1,x_2} \quad f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$$

Cheklovlar:

$$g_1(x_1,x_2)=1-x_1^2-x_2^2\le 0$$
$$g_2(x_1,x_2)=x_1-0.5\le 0$$

Masalani ichki nuqtalar metodi yordamida yechish uchun cheklov funksiyasini ham qo'shamiz:

$$\min_{x_1,x_2} \quad f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+\mu\left(\ln(1-x_1^2-x_2^2)+\ln(0.5-x_1)\right)$$

va quyidagi natijalarga erishamiz:

birinchi iteratsiyada: $x_1\approx 0.3, x_2\approx 0.3$ - beshinchi iteratsiyada: $x_1\approx 0.4, x_2\approx 0.2$.

Nyuton usuli

Nyuton usuli — bu funksiya uchun stasionar nuqtalarni topish usuli bo'lib, u funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini talab qiladi va optimallikka tezda erishishga imkon yaratadi. Bu metod boshqa metodlardan farqlanib, funksiya minimumini topish uchun ishlatiladigan iteratsion optimallashtirish algoritmi hisoblanadi. Nyuton usulining asosiy g'oyasi — har bir iteratsiyada funksiya qiymatini uning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalariga asoslangan kvadratik model yordamida yaqinlashishdir. Agar qavariq $f(x)$ funksiyasi berilgan bo'lsa, Nyuton usuli optimallashtirishda funksiyaning gradienti va Hessian (ikkinchi tartibdagi hosilalar) dan foydalanib, optimal nuqtaga yo'naltirilgan yangilanishlarni bajaradi. Nyuton usulining bosqichlari quyidagicha:

$$x_{k+1}=x_k-\left(\nabla^2 f(x_k)\right)^{-1}\nabla f(x_k)$$

Bu yerda:

- x_k — hozirgi baholanadigan minimizer.
- $\nabla f(x_k)$ — f funksiyasining gradienti x_k nuqtasida.
- $\nabla^2 f(x_k)$ — f funksiyasining Hessian matrisi (ikkinchi tartibdagi hosilalari) x_k nuqtasida.

Nyuton usulining asosiy xususiyatlari

• **Konvergensiya:** Nyuton usuli qavariq funksiyalar uchun kvadratik tarzda konvergent bo‘lib, ya’ni iteratsiyalar optimal nuqtaga yaqinlashgan sayin juda tez konvergensiya qiladi.

• **Kvadratik yaqinlashish:** Har bir iteratsiyada funksiya kvadrat funksiyasi sifatida yaqinlashadi.

• **Tezlik:** Bu usul har bir iteratsiyada Hessianini hisoblash va uning teskari qiymatini topishni talab qiladi. Ammo Hessian maxsus tuzilishga ega bo‘lsa, bu jarayon samarali amalga oshirilishi mumkin.

Misol. 3. Quyidagi qavariq kvadrat funksiyani olaylik:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$$

Bu yerda:

- A — simmetrik va musbat aniqlangan matritsa.
- b — tegishli o‘lchamdagi vektor.

Endi, ushbu funksiyada Nyuton usulini qo’llash jarayonlarini ko‘rib chiqamiz .

Bosqichma-bosqich hisoblash

Funksiya ta’rifi: Funksiya $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ sifatida belgilangan.

Gradient va Hessian: Gradient $\nabla f(x)$ quyidagicha hisoblanadi:

$$\nabla f(x) = Ax - b$$

Hessian $\nabla^2 f(x)$ quyidagicha hisoblanadi:

$$\nabla^2 f(x) = A$$

Agar A simmetrik va musbat aniqlangan bo‘lsa, funksiya qavariq bo‘lib, Hessian teskarilanuvchan bo‘ladi.

Nyuton usulida yangilanish qoidasi: Har bir iteratsiya quyidagicha yangilanishni amalga oshirishni talab qiladi:

$$x_{k+1} = x_k - \left(\nabla^2 f(x_k)\right)^{-1} \nabla f(x_k)$$

Boshlang‘ich shartlar quyidagilar: Boshlang‘ich taxmin x_0 va A, b matritsa va vektorlarini tanlaymiz. Misol uchun:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Birinchi iteratsiya. Gradientni $\boldsymbol{x_0}$ nuqtada hisoblaymiz:

$$\nabla f(x_0) = Ax_0 - b = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Hessian doimiy bo‘lib, shuning uchun $\nabla^2 f(x_0) = A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Nyuton qadamini hisoblaymiz:

$$\Delta x = \left(\nabla^2 f(x_0)\right)^{-1} \nabla f(x_0)$$

Birinchi navbatda, A matritsasining teskari qiymatini hisoblashimiz kerak. 2x2 matritsaning teskari qiymatini hisoblash formulasidan foydalanamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

bu yerda $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Determinantni hisoblaymiz:

$$\det(A) = ad - bc = (4)(3) - (1)(1) = 12 - 1 = 11$$

Shuning uchun:

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Endi Nyuton qadamini hisoblaymiz:

$$\Delta x = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Matritsani ko‘paytiramiz:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(-1) + (-1)(-2) \\ (-1)(-1) + (4)(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 2 \\ 1 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Endi $\frac{1}{11}$ ga ko‘paytiramiz:

$$\Delta x = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} \\ -\frac{7}{11} \end{bmatrix}$$

Yangilangan x_1 ni hisoblash:

$$x_1 = x_0 - \Delta x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} \\ -\frac{7}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{7}{11} \end{bmatrix}$$

Ikkinchi iteratsiya. Endi yuqoridagi jarayonni takrorlaymiz. Bu jarayonlar o‘xshash bo‘ladi, faqat gradient va Hessianni $\boldsymbol{x_1}$ nuqtasida hisoblaymiz va $\boldsymbol{x_2}$ ni yangilaymiz. Agar $\boldsymbol{A}$ va $\boldsymbol{b}$ o‘zgarmasa, jarayon juda tez boradi va konvergent bo‘ladi.

Qavariq optimallashtirishning dunyo bo‘ylab ishlatilish sohalari

Qavariq optimallashtirish dunyo bo‘ylab turlicha sohalarda keng qo‘llaniladi. Quyida ba’zi misollarni ko‘rib chiqamiz:

Mashinasozlik

Mashinasozlik qavariq optimallashtirish SVM (Support Vector Machines) va logistika regressiyasi kabi algoritmlarda ishlatilib, mashinasozlik (Machine learning-ML) da juda muhim rol o‘ynaydi, chunki ML’dagi ko‘plab muammolar, masalan, klassifikatorlar yoki regressiya modellari o‘rganish, qavariq optimallashtirish muammolari sifatida shakllantirilishi mumkin.

Quyida qavariq optimallashtirishning mashinasozlikda asosiy qo‘llanilishlaridan ba’zilari keltirilgan:

Chiziqli regressiya - eng oddiy va mashhur mashinani o‘rganish modellaridan biridir. Maqsad, kirish xususiyatlari x va maqsadli o‘zgaruvchi y o‘rtasida chiziqli bog’lanishni topishdir. Qavariq optimallashtirish nuqtayi nazaridan, chiziqli regressiya, bashorat qilingan qiymatlar va haqiqiy maqsad qiymatlar o‘rtasidagi kvadratlar xatosining yig‘indisini minimallashtirishni maqsad qiladi.

Maqsad: Kamchiliklar kvadratlari yo‘qotish funksiyasini minimallashtirish:

$$\min_{\beta} \frac{1}{2} \parallel X\beta - y \parallel^2$$

Bu yerda:

- $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ — n ta o’quv namunasi va p ta xususiyatdan iborat bo’lgan matritsa.
- $\beta \in \mathbb{R}^{p}$ — model parametrlarining vektori (koeffitsientlar).
- $y \in \mathbb{R}^{n}$ — kuzatilgan maqsad qiymatlarining vektori.

Kamchiliklar kvadratlari funksiyasi qavariq bo’lib, uning yechimi quyidagi yopiq shaklda ifodalangan:

$$\beta^* = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Demak, chiziqli regressiya qavariq optimallashtirish muammosidir. Logistik regressiya ikkilik klassifikatsiya vazifalari uchun ishlatiladi. Bu berilgan x kirishining ma’lum bir sinfga tegishliligi ehtimolini model qiladi. Maqsad logistik yo’qotish funksiyasini minimallashtirish (log-loss yoki ikkilik cross-entropy deb ham ataladi).

Maqsad: Logistik yo’qotish funksiyasini minimallashtirish:

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \left[-y_i \log\left(h_\beta(x_i)\right) - (1 - y_i)\log\left(1 - h_\beta(x_i)\right)\right]$$

Bu yerda:

- $h_\beta(x_i) = \frac{1}{1+\exp(-x_i^T \beta)}$ — logistik (sigmoid) funksiyasi.
- $y_i \in \{0,1\}$ — ikkilik maqsad belgisi

Logistik yo‘qotish funksiyasi β bo‘yicha qavariq bo‘lib, shuning uchun logistik regressiyani qavariq optimallashtirish orqali yechish mumkin.

Iqtisodiyot va Moliya

Qavariq optimallashtirish iqtisodiyot va moliya sohalarida keng qo‘llanib, ko’plab iqtisodiy modellar va moliyaviy muammolarni yechishda ishlatilishi mumkin. Bu sohalarda qavariq optimallashtirishning asosiy afzalligi shundaki, u tegishli shartlar bajarilganda global optimal yechimlarni ta’minlaydi, bu esa murakkab qarorlar qabul qilishda va optimal yechimga erishishda kuchli vosita bo‘lib xizmat qiladi.

Xavfni boshqarish - moliyaviy xavflarni aniqlash, baholash va kamaytirish bilan bog’liq bo’lib, qavariq optimallashtirish ko‘pincha Value at Risk (VaR), Conditional Value at Risk (CVaR) va xavfga nisbatan optimallashtirishni o’rganishda ishlatiladi.

Bu modellar moliya institutlariga kapitalni optimal taqsimlashni, xavflarni balanslashni va regulyator talablarini bajarishni ta'minlashda amaliy ko'maklashadi.

Misol uchun, CVaRni minimallashtirish ham qavariq optimallashtirish muammolaridan biriga kiradi:

$$\min_{\alpha,\beta} \quad \alpha + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \le \beta}\, X_i$$

Bu yerda:

- α — λ ishonchlilik darajasida CVaR.
- β — chegara.
- X_i — moliyaviy aktivlarning daromadlari.

Iqtisodiyotda, qavariq optimallashtirish ta'minot zanjiri boshqaruvi muammolarini optimal hal etishda ham qo'llanilishi mumkin. Maqsad, ishlab chiqarish, taqsimlash va inventarizatsiya darajalarini optimallashtirish bo'lib, xarajatlarni minimallashtirish va talabni qondirishni ta'minlashdan iboratdir. Bu muammo odatda xarajat funksiyasini minimallashtirishni va turli cheklovlarni (masalan, ishlab chiqarish quvvati, transport xarajatlari va talabni qondirish) qondirishni o'z ichiga oladi.

Maqsad: Umumiy ta'minot zanjiri xarajatlarini minimallashtirish:

$$\min_{x} \quad \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

Cheklovlar :

$$\sum_{j} x_{ij} = d_i, \quad x_{ij} \ge 0, \quad \text{barcha} \quad i,j$$

Bu yerda:

- x_{ij} — i-nuqtadan j-nuqtaga yetkaziladigan tovar miqdori.
- c_{ij} — i-nuqtadan j-nuqtaga yetkazish xarajati.
- d_i — i-nuqtadagi talab.

Bu muammo, agar xarajat funksiyasi chiziqli bo'lsa, qavariq bo'ladi va uni chiziqli dasturlash metodlari yordamida samarali yechish mumkin.

Signalni qayta ishlash

Signalni qayta ishlashda, shovqinlarni bartaraf etish kabi masalalarda qavariq optimallashtirishning o'rni kattadir. Chunki ko'plab signalni qayta ishlash muammolari qavariq optimallashtirish muammolari sifatida shakllantirilishi mumkin. Bu muammolar signalni qayta tiklash, filtrlash, shovqinni kamaytirish va siqish kabi sohalarda yuzaga keladi. Signalni ishlashdagi qavariq optimallashtirishning afzalligi shundaki, u qavariq bo'lgan maqsad funksiyalari orqali global optimal yechimlarni ta'minlaydi.

Signalni shovqindan tozalash - signaldan shovqinni olib tashlab, uning muhim xususiyatlarni va strukturalarni saqlashni o‘z ichiga oladi. Qavariq optimallashtirish texnikalari shovqinni kamaytirish vazifalarida ko‘pincha ishlatiladi, ayniqsa maqsad funksiyasi qavariq bo‘lganda va shovqin ma’lum bir statistik taqsimotga ega bo‘lsa (masalan, Gauss taqsimoti).

Misol sifatida yuqoridagi signalni tozalash muammosini ko‘raylik:

$$\min_x \| y - x \|_2^2 \quad \text{cheklov bilan} \quad \| x \|_1 \leq \lambda$$

Bu erda:

- y — shovqinli signal.
- x — tozalangan signal.
- λ — shovqinli signalga moslik va tozalangan signalning siyrakligini nazorat qiluvchi tartibga solish parametri.

Bu qavariq optimallashtirish muammosi bo‘lib, maqsad kvadratik xatolikni minimallashtirish, cheklov esa tozalangan signaldagi siyraklikni ta’minlaydi. Siqilgan hisoblash (CS) texnikasi, signalni kichik o‘lchovlardan tiklashni maqsad qiladi, bu esa ko’plab signallarning siyrak bo‘lishiga asoslanadi (masalan, waveletlar). CSda maqsad, siyrak signalni x ni kam o‘lchovlar y dan tiklashdir, bu esa optimallashtirish muammosi sifatida qaraladi.

Maqsad: chiziqli o‘lchov cheklovga rioya qilgan holda signalni shovqindan tozalash:

$$\min_x \| x \|_1 \quad \text{cheklov bilan} \quad \| Ax - y \|_2^2 \leq \epsilon$$

Bu yerda:

- A — o‘lchovlar matritsasi.
- y — o‘lchovlar vektori.
- ϵ — ruxsat etilgan xatolik.

Bu qavariq optimallashtirish muammosi bo‘lib, yechim siyrak bo‘ladi, ya’ni x ning ko‘plab elementlari nolga teng bo‘ladi, bu esa asl signalni kamroq o‘lchovlardan tiklashga imkon beradi.

Telekommunikatsiya

Telekommunikatsiyada tarmoq dizayni, resurslarni taqsimlash va marshrutlashda qavariq optimallashtirishdan foydalaniladi.

Qavariq optimallashtirish telekommunikatsiya sohasida samarali vosita bo‘lib, ko‘plab optimallashtirish muammolarini hal qilish uchun ishlatiladi. Bu, ayniqsa, signallar ustida qayta ishlash, tarmoqni loyihalash, energiya nazorati resurslarni taqsimlash va aralashuvni boshqarish kabi sohalarda keng qo‘llaniladi. Quyida qavariq optimallashtirishning telekommunikatsiyadagi asosiy qo‘llanilish tarmoqlariga oid umumiy ma’lumotlar, formulalar va misollar keltirilgan.

Simli tarmoqlarda quvvatni boshqarish

Simli tarmoqlarda quvvatni boshqarish - uzatuvchilar tomonidan ishlatiladigan quvvatni optimallashtirish muammosidir, bu esa kam aralashuvni ta’minlash va ishonchli aloqa o‘rnatish uchun zarurdir. Qavariq optimallashtirish samarali quvvatni boshqarish strategiyalarini ishlab chiqishda keng qo‘llaniladi.

Muammo tavsifi:

• **Maqsad:** Jami quvvat sarfini minimalizatsiya qilish, shu bilan birga, ma’lum sifat ko‘rsatkichlarini (SINR kabi) ta’minlash.

• **Formulalash:** Bu muammo qavariq optimallashtirish muammosi sifatida qarash mumkin, bu yerda quvvatni boshqarish strategiyasi SINR va jami quvvatdan qat’iy nazar bajariladi.

Misol uchun, bir simli tarmoqda quyidagi optimallashtirish muammosini ko’rib chiqamiz:

$$\min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^{N} p_i \quad \text{shart bilan} \quad \mathrm{SINR}_i \geq \gamma_i, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,N$$

Bu yerda:

- p_i — i-foydalanuvchining uzatish quvvati,
- SINR_i — i-foydalanuvchining signal-to-interference-plus-noise ratio (SINR),
- γ_i — i-foydalanuvchi uchun minimal talab qilinadigan SINR,
- N — foydalanuvchilar soni.

Bu optimallashtirish muammosi qavariq bo‘lib, uni (interior-point method)ichki nuqtaklar yoki (gradiyent descent) gradiyent tushish kabi usullar yordamida hal qilish mumkin.

Ko‘p foydalanuvchili tizimlarda resurslarni taqsimlash

Ko‘p foydalanuvchili tizimlarda, masalan, 4G/5G tarmoqlarida resurslarni taqsimlash — vaqt, chastota va quvvatni foydalanuvchilar orasida optimal tarzda taqsimlashni anglatadi. Qavariq optimallashtirish orqali tarmoq samaradorligini oshirish va resurslarni adolatli taqsimlanishni ta’minlash uchun strategiyalarni ishlab chiqiladi.

Muammo tavsifi:

• **Maqsad:** Tizimning umumiy tezligini maksimal qilish, shu bilan birga har bir foydalanuvchi uchun adolat va sifat ko‘rsatkichlarini ta’minlash.

• **Formulalash:** Bu muammo qavariq optimallashtirish muammosi sifatida formulalash mumkin.

Misol uchun, umumiy tezlikni maksimal qilish muammosi quyidagicha formulalash mumkin:

$$\max_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^{N} \log_2\left(1 + \mathrm{SINR}_i(p)\right)$$

Shartlar:

- Quvvat cheklovlari: $p_i \leq P_{\max}, \quad i = 1,2, \dots, N$
- SINR cheklovlari: $\text{SINR}_i(p) \geq \gamma_i, \quad i = 1,2, \dots, N$

Bu yuqoridagi muammo qavariq bo‘lib, uni konveks relaxatsiya yoki dual decompozitsiya kabi usullar yordamida hal qilish mumkin.

Tarmoqlarda aralashuvni boshqarish

Aralashuvni boshqarish — bu ko‘p tarmoqli tizimlarda signalning to‘g‘ri tarqalishi va aralashuvni kamaytirish uchun zarur bo‘lgan optimallashtirish muammosidir. Qavariq optimallashtirish aralashuvni minimallashtirish va aloqa sifatini yaxshilashda qo’llaniladi.

Muammo tavsifi:

- **Maqsad:** Jami aralashuvni minimallashtirish, shu bilan birga, aloqa ishonchliligini ta’minlash (masalan, SINR cheklovlari).
- **Formulalash:** Bu muammo qavariq optimallashtirish muammosi sifatida formulalash mumkin, bu yerda maqsad aralashuvni minimallashtirish.

Misol uchun, aralashuvni minimallashtirish muammosi quyidagicha formulalash mumkin:

$$\min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \frac{p_i p_j}{d_{ij}^2} \quad \text{shart bilan} \quad \text{SINR}_i \geq \gamma_i, \quad p_i \geq 0$$

Bu yerda:

- d_{ij} — i-uzatuvchisi va j-qabul qiluvchisi orasidagi masofa,
- p_i — i-uzatuvchisi quvvati,

MIMO tizimlarida beamforming (nur tarqatish) optimizatsiyasi

MIMO tizimlarida beamforming — bu signalni to‘g‘ridan to‘g‘ri qabul qiluvchi tomoniga yo‘naltirish uchun optimallashtirishni anglatadi. Qavariq optimallashtirish beamforming vektorlarini ishlab chiqishda yordam beradi.

Muammo Tavsifi:

- **Maqsad:** Qabul qiluvchi tomonida maksimal signal-to-noise ratio (SNR) ni ta’minlash yoki aralashuvni kamaytirish uchun beamforming vektorlarini optimallashtirish.
- **Formulalash:** Bu muammo qavariq optimallashtirish muammosi sifatida formulalash mumkin, bu yerda maqsad SNR ni maksimal qilish.

Misol uchun, beamforming optimallashtirish muammosini quyidagicha formulalash mumkin:

$$\max_{\mathbf{w}_i} \text{SINR}_i = \frac{\left|h_i^T \mathbf{w}_i\right|^2}{\sum_{j \neq i} \left|h_j^T \mathbf{w}_j\right|^2 + \sigma^2}$$

Shartlar:

- Quvvat cheklovlari: $\| \mathbf{w}_i \|^2 \leq P_i, \quad i = 1,2, \dots, N$

Bu muammo qavariq bo‘lib, uni semidefinite programming yoki quadratic programming yordamida hal qilish mumkin.

Tarmoqni loyihalash va trafikni boshqarish

Telekommunikatsiya tarmoqlari odatda turli trafik talablariga moslashishi, eng yaxshi xizmat ko‘rsatish sifatini ta’minlashi kerak. Shu sababli qavariq optimallashtirish tarmoqni loyihalashda, masalan, bazaviy stansiyalarni joylashtirishda va tarmoq resurslarini optimal taqsimlashda qo‘llaniladi.

Muammo Tavsifi:

- **Maqsad:** Tarmoq xarajatlarini minimallashtirish, shu bilan birga, sifat ko‘rsatkichlarini ta’minlash (masalan, kechikish, paket yo‘qotish).
- **Formulalash:** Bu muammo qavariq optimallashtirish muammosi sifatida formulalash mumkin, bu yerda trafik talablarini, kechikishni va tarmoq imkoniyatlarini hisobga olish kerak.

Masalan, tarmoq oqimini optimallashtirish quyidagicha formulalash mumkin:

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^{N} c_i\, x_i \quad \text{shart bilan} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

Bu yerda:

- $\mathbf{x}$ — tarmoqdagi har bir aloqada ma’lum oqim,
- c_i — i-alohida uzatish xarajati,
- A — tarmoqning insidensiya matritsasi,
- $\mathbf{b}$ — trafik talabi vektori.

Bu muammo chiziqli dasturlash muammosisifatida yo’naltiriladi va qavariq optimallashtirish usullari yordamida hal qilinadi.

Xulosa

Bu usullar 4G/5G tarmoqlari, Wi-Fi va boshqa simsiz tizimlarning samarali ishlashini ta’minlashda muhim ahamiyatga ega.

Qishloq xo‘jaligi

Qavariq optimallashtirishdan O‘zbekiston qishloq xo‘jaligi sohasida resurslar, masalan, suv, o‘g‘itlar va mehnat kuchidan samarali foydalanishni optimallashtirish uchun samarali foydalanilib kelinmoqda. Bu usul resurslarni optimal taqsimlash, mahsulotni oldindan miqdor va sifat jihatdan rejalashtirish, sug‘orish tizimlarini optimallashtirish va zararkunandalarga qarshi kurashish kabi muammolarni hal qilishda keng qo‘llaniladi [6-38]. Quyida qishloq xo‘jaligida qavariq optimallashtirishning ba’zi qo‘llanilishlari va unga oid misollar keltirilgan.

Resurslarni taqsimlash

Qishloq xo‘jaligi resurslari, jumladan, yer, suv, o‘g‘it va ishch kuchi, cheklangan bo‘lib, ularni samarali taqsimlash har doim dolzarb vazifa sifatida qaraladi. Qavariq optimallashtirish bu resurslarni optimal tarzda taqsimlashda yordam beradi, bu esa hosildorlikni oshirish va xarajatlarni kamaytirishga olib keladi. Quyida shunga oid masalalarni koʻrib chiqaylik

Muammo tavsifi:

Fermada yer maydonini turli ekinlarga optimal tarzda taqsimlash muammosi qavariq optimallashtirish orqali hal qilinishi mumkin. Masalan, x_1 va x_2 ekinlari uchun yer maydonini taqsimlash. Bunda har bir ekin uchun hosildorlik va xarajatlar quyidagicha boʻlsin:

Misol. 4. Bir fermerda 100 ga yer bor va u bu yerga ikki turdagi ekin, masalan, bugʻdoy ($\boldsymbol{x_1}$) va makkajoʻxori ($\boldsymbol{x_2}$) ekmoqchi. Har bir ekinning hosildorligi va xarajatlari quyidagicha:

- Bugʻdoyning hosildorligi: $2x_1$ (bir gektar uchun 2 tonna), - Makkajoʻxori hosildorligi: $1.5x_2$ (bir gektar uchun 1.5 tonna), - Har bir ekin uchun xarajatlar: $c_1 = 500x_1$, $c_2 = 400x_2$ (har bir gektar uchun xarajatlar).

Bu muammoni quyidagicha optimallashtirish formulasi bilan ifodalash mumkin:

$$\min_{x_1,x_2} \quad 500x_1 + 400x_2 \quad \text{(Jami xarajatlar)}$$

$$\text{shart bilan} \quad x_1 + x_2 = 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Bu muammo qavariq optimallashtirish boʻlib, uni chiziqli dasturlash yordamida hal qilish mumkin. Bunda:

$$\min_{x_1,x_2} \quad 500x_1 + 400x_2$$

Cheklovlar:

$$x_1 + x_2 = 100 \quad \text{(yer maydoni to'liq taqsimlanishi kerak)}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Quyidagi natijaga erishamiz:

Optimal yechimni hisoblash uchun, bu muammoni matematik usullarda yechishimiz mumkin. Bunda $x_1 = 60$ (bugʻdoy uchun 60 ga), $x_2 = 40$ (makkajoʻxori uchun 40 ga) boʻladi. Jami xarajatlar:

$$500(60) + 400(40) = 30000 + 16000 = 46000 \quad \text{so'm.}$$

Sugʻorish Tizimini optimallashtirish

Sugʻorish tizimining samarali ishlashi yerning hosildorligini oshirish uchun juda muhimdir. Qavariq optimallashtirish sugʻorishning optimal jadvalini yaratishda qoʻllaniladi, endi koʻriladigan misolda yerga beriladigan suv sarfini minimallashtirish va hosildorlikni maksimal qilish masalasi keltirilgan:

Misol. 5. Fermerda 200 ga yer mavjud va uning ba’zi qismlari suvsiz. Suvning jami miqdori 3000 kubometrga teng. Har bir maydon uchun optimal suv miqdori va hosildorlik quyidagicha:

- 100 ga yer uchun suv miqdori S_1, - 100 ga yer uchun suv miqdori S_2, - Har bir kubometr suvning hosildorlikka ta'siri $\alpha_1 = 2$ tonna va $\alpha_2 = 1.5$ tonna.

Bu muammoni quyidagi tarzda optimallashtirish formulasi bilan ifodalash mumkin:

$$\max_{S_1,S_2} \quad 2S_1 + 1.5S_2 \quad \text{(Jami hosildorlik)}$$
$$\text{shart bilan} \quad S_1 + S_2 = 3000$$
$$S_1, S_2 \geq 0$$

Natija quyidagicha:

Bu muammoni yechish uchun $S_1 = 2000$, $S_2 = 1000$ optimal yechim bo'ladi. Jami hosildorlik:

$$2(2000) + 1.5(1000) = 4000 + 1500 = 5500 \quad \text{tonna.}$$

Zararkunandalarga qarshi kurashish

Qishloq xo'jaligida zararkunandalar va kasalliklar hosildorlikni sezilarli darajada kamayishiga olib kelishi mumkin. Qavariq optimallashtirish zararkunandalarni nazorat qilish va optimal kimyoviy vositalarni taqsimlash muammolarini hal qilishda qo'llaniladi.

Muammo tavsifi:

Zararkunandalarga qarshi kurashishda pestitsidlar va boshqa himoya vositalarini samarali taqsimlash zarur. Maqsadimiz zararkunandalarga qarshi kurashishda sarflanadigan vositalarni optimal tarzda taqsimlash va hosildorlikni maksimal qilishdir.

Misol. 6. Fermerda zararkunandalarga qarshi kurashish uchun $\boldsymbol{x_1}$ va $\boldsymbol{x_2}$ turdagi pestitsidlar mavjud. Har bir pestitsidning samaradorligi va narxi quyidagicha:

- Pestitsid 1: Samaradorlik $\alpha_1 = 3$ tonna, narx $c_1 = 2000$ so'm, - Pestitsid 2: Samaradorlik $\alpha_2 = 2.5$ tonna, narx $c_2 = 1500$ so'm.

Bu muammoni quyidagi tarzda optimallashtirish formulasi bilan ifodalash mumkin:

$$\max_{x_1,x_2} \quad 3x_1 + 2.5x_2 \quad \text{(Jami hosildorlik)}$$
$$\text{shart bilan} \quad 2000x_1 + 1500x_2 \leq 100000$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Natija:

Optimal yechimni hisoblash uchun bu muammoni yechishimiz mumkin. Masalan, $x_1 = 20$ va $x_2 = 40$ bo'lsa, jami hosildorlik:

$$3(20) + 2.5(40) = 60 + 100 = 160 \quad \text{tonna.}$$

Xulosa

Qavariq optimallashtirish dunyo bo'ylab turli sohalarda keng qo'llaniladigan kuchli vosita bo'lib, O'zbekistonda ham qishloq xo'jaligi, energiya va telekommunikatsiya kabi tarmoqlarda samaradorlikni oshirishda katta imkoniyatlarga ega. Optimallashtirish usullari va hisoblash resurslari takomillashgan sari, O'zbekistonda qavariq optimallashtirishning roli yanada muhimlashadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Boyd, S., Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
2. Bertsekas, D.P., Nesterov, Y.. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific. (2004).
3. Shor N.Z. *Introductory Lectures on Convex Optimization:* A Basic Course. Springer. (1985).
4. *Minimization Methods for Non-Differentiable functions.* Springer.

Расулов Х.Р. Об одной квадратичной динамической системе с непрерывным временем // Тезисы международной научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» Nukus, May 2-3, 2023, Стр.286-287.

6. Rasulov X. R. On a Volterra dynamical system of a two-sex population, Lobachevskii Journal of Mathematics, 45(8), 3975-3985 pp., 2024.
7. Математические заметки, 2024, том 116, выпуск 5, страницы 792–808, DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13950.
8. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.
9. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.
10. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // arXiv e-prints, 2022, arXiv: 2211.06186.
11. Xaydar Raupovich Rasulov. Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation with mixed type. AIP Conf. Proc. 2781, 020016 (2023)
12. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
14. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
15. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
16. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
17. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
18. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
19. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
20. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
21. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
22. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

23. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
24. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
25. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
26. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
27. Rasulov X.R. Ayrim volterra dinamik sistemalarining dinamikasi haqida // BuxDU Ilmiy axboroti, 2024 yil, 5-son, 3-10 betlar.
28. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
29. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
30. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
31. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
32. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
33. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
34. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
35. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).
36. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).
37. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
38. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).