АНАЛИЗ ЭКОНОМИКИ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

Унгалова М.Б, Холдорова З.Р
Самаркандский Государственный университет
имени Шарофа Рашидова
mehrinisoungalova@gmail.com

Аннотация: В работе проделана анализ экономики с помощью модели Леонтьева для конкретного случая производственного сектора народного хозяйства.

Исследованы продуктивность матрицы прямых затрат, определены коэффициенты полных затрат, вектор валового выпуска и цены по правилу полных затрат.

Ключевые слова: модель Леонтьева, матрица прямых затрат, валовый выпуск, обратная матрица, продуктивность.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей, т.е. продукция каждой из отраслей предполагается однородной. Предположим, что различные отрасли выпускают разные продукты. Таким образом, в рассматриваемой экономике выпускается n видов продуктов. В процессе производства своего вида продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей. Введем следующие обозначения:

величина x_{ij} показывает объем продукции отрасли j, израсходованной отраслью i в процессе производства за отчетный период. Число X_i равно общему объему продукции (валовому выпуску) i-й отрасли за тот же период,

а значение Y_i показывает объем продукции, который был потреблен в непроизводственной сфере, для создания запасов и т.д.

Таким образом, j-й столбец $(x_{ij}), i=1,...,n,$ показывает распределение продукции отрасли j на производственные нужды других отраслей. Если все переменные i-й строки разделить на X_i, то число $a_{ij} = x_{ij} / X_i$ можно понимать как объем продукции j-й отрасли, необходимый для производства единицы i-го продукта; число $y_i = Y_i / X_i$ будем понимать как долю продукции i-й отрасли, которая пошла на внепроизводственное потребление.

Числа a_{ij} носят название коэффициентов прямых затрат отраслей i.

Сделаем два предположения.

1. Будем считать технологию производства неизменной в течение некоторого промежутка времени.

2. Будем считать существующую технологию линейной, т.е. такой, при которой для создания объема валового выпуска продукции i-й отрасли X_i необходимо произвести затраты в объемах $X_i a_{ij}$, $j=1,...,n$, продукции всех отраслей.

Будем говорить, что матрица $A(a_{ij})$ задает технологию при единичной интенсивности работы всех отраслей. Сопоставим каждой i-й отрасли число $l_i > 0$ — количество прямых затрат на производство единицы продукта i-й отрасли, или затраты трудовых ресурсов при единичной интенсивности технологического процесса.

Таким образом, имеем ($n \times n$)-матрицу A прямых затрат, или матрицу технологических коэффициентов, и вектор $L^T = (l_1, l_2, l_3, ..., l_n)$ прямых затрат труда (L — вектор-столбец).

В рассматриваемой модели имеется n воспроизводимых факторов производства и один невоспроизводимый фактор (труд).

Допустим, что в некотором промежутке времени $[T_0, T]$ все отрасли работают таким образом, что годовой объем валового выпуска отрасли с номером i составляет X_i, т.е. считается, что i-я отрасль работает с интенсивностью X_i.

Обозначим через X вектор валового выпуска или интенсивности:

$X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Чтобы произвести единицу первого продукта, необходимо затратить $(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ продуктов различных отраслей.

По свойству линейности для производства X_1 единиц первого продукта надо затратить $(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})X_1$.

Аналогично чтобы произвести единицу j-го продукта, надо затратить $(a_{j1}, a_{j12}, ..., a_{jn})$, а на X_j единиц j-го продукта потребуется $(a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn})X_j$ продуктов.

В то же время, чтобы произвести выпуск $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, надо затратить первого продукта $X_1 a_{11} + X_2 a_{21} + ... + X_n a_{n1}$, а i-го продукта

$X_1 a_{1i} + X_2 a_{2i} + ... + X_n a_{ni}$.

Для выпуска X надо затратить также $l_1 X_1, l_2 X_2, ..., l_n X_n$ труда.

В матричной форме получаем следующие результаты: для того чтобы произвести $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, необходимо затратить XA товаров и XL труда.

Таким образом, часть общего валового выпуска, пошедшая на производственные нужды, описывается вектором

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}X_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}X_i\right),$$

т.е. вектор производственных затрат равен XA.

Тогда свободный остаток $Y = X - XA$ будет использован на непроизводственные цели. Если каждый год выпускается X, то конечное потребление $X - XA = Y$. Вектор Y — вектор конечного потребления (спроса) – называется еще вектором чистого выпуска или непроизводственного потребления конечного выпуска. Элементы матрицы A и вектора L называют коэффициентами прямых затрат.

Основной вопрос, возникающий в процессе планирования и при анализе производства, формулируется следующим образом: при заданном векторе Y конечного потребления требуется определить необходимый вектор X валового выпуска, т.е. требуется решить систему уравнений $X - XA = Y$ при заданном векторе Y и матрице А. Данное уравнение вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов X и Y называется моделью Леонтьева.

Матрица A с неотрицательными элементами называется продуктивной, если существуют векторы $Y \geq 0$ и $X \geq 0$, такие что $X - XA = Y$.

Теорема. Пусть A — матрица размера $n \times n$ с неотрицательными элементами. Следующие условия эквивалентны:

1) A — продуктивна;

2) $(E - A)$ — неотрицательно обратима, т.е. существует $(E - A)^{-1}$ и $(E - A)^{-1} \geq 0$ поэлементно;

3. $(E - A)$ обратима и $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

Следствие. Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда ее спектральный радиус меньше *1*.

Напомним, что спектральный радиус матрицы — это максимум из модулей всех ее собственных чисел.

Следствие. Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда

$\forall Y >> 0 \exists X >> 0 : X - AX = Y$

Замечание. Формула (3.1) имеет весьма важную экономическую интерпретацию. Для того чтобы произвести чистый выпуск Y, следует затратить YA товаров. Чтобы их затратить, их надо произвести, но чтобы их произвести, необходимо затратить YA^2 товаров, для этого необходимо затратить YA^3 товаров и т.д.

Коэффициенты матрицы $B = (E - A)^{-1}$ называются коэффициентами полных затрат.

Для того чтобы произвести чистый выпуск Y, необходимо тратить не только продукты, но и труд.

Чтобы произвести вектор Y чистого выпуска, надо затратить величину YL труда. Но до этого необходимо затратить YA^2L труда на производство YA^2 товаров и т.д. Получаем

$$XL = Y(E + A + A^2 + A^3 + ...)L = YT,$$

где $T = (E + A + A^2 + A^3 + ...)L = (E - A)^{-1} L$ – вектор полных затрат труда.

Таким образом, $XL = YT = Y(E - A)^{-1} L.$

Валовой выпуск, умноженный на прямые затраты труда, равен конечному (чистому) выпуску, умноженному на полные затраты труда.

Система ценовых уравнений

Предположим, что вектор цен $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ ... \\ p_n \end{pmatrix}$ и номинальная ставка заработной платы ω заданы. Очевидно, что цена единицы i-го продукта равна

$$p_i = a_{i1} p_1 + a_{i2} p_2 + ... + a_{in} p_n + l_i \omega, \; i = 1,2,...n.$$

В матричной форме имеем

$$p = Ap + L\omega; \quad p - Ap = L\omega; \quad (E - A)p = L\omega;$$

$$p = (E - A)^{-1} L\omega = (E + A + A^2 + ...)L\omega = T\omega; \; p = T\omega, \quad (1)$$

т.е. цены, построенные по затратному принципу, пропорциональны вектору полных затрат труда. Таким образом, схема формирования цен по полным затратам труда (1) исходит из системы ценовых уравнений

$$p = Ap + L\omega.$$

Схема формирования цен по правилу «затраты плюс» может быть легко получена, если исходить из системы ценовых уравнений

$$p = (1 + r)(Ap + L\omega), \quad (2)$$

где r — норма прибыли, $r = (R - C)/C$; R — выручка; C — полные затраты.

При не очень больших r система ценовых уравнений (2) имеет решение.

Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями используют таблицы определенного вида, называемые таблицами межотраслевого баланса. Такая таблица межотраслевого баланса (МОБ) составлена для рассматриваемые нами задачам, но не приведена из-за большого объема математическая модель межотраслевого баланса, которая допускает .

Рассмотрим пример анализа экономики с помощью модели В. В. Леонтьева:

Даны коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} и вектор конечной продукции для трехотраслевой экономической системы:

$$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,4\\ 0,2 & 0,5 & 0,0\\ 0,3 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}200\\ 100\\ 300\end{pmatrix}.$$

Вектор прямых затрат труда $L=(5\ 4\ 2)$, вектор чистого выпуска

$Y=\begin{pmatrix}200\\ 100\\ 300\end{pmatrix}$ и номинальная ставка заработной платы $\omega=1$

Требуется выполнить следующие задания.

1. Проверить продуктивность матрицы A.
2. Определить коэффициенты полных затрат.
3. Определить вектор валового выпуска.
4. Определить межотраслевые поставки продукции.
5. Определить цены по правилу полных затрат.

Решение. 1**.** Матрица A продуктивна на основании достаточного признака, так как сумма элементов в каждом ее столбце меньше *1*.

2. Матрица коэффициентов косвенных затрат *1*-го порядка

$$A^{(1)}=A^2=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,4\\ 0,2 & 0,5 & 0,0\\ 0,3 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,4\\ 0,2 & 0,5 & 0,0\\ 0,3 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,23 & 0,12 & 0,20\\ 0,16 & 0,27 & 0,08\\ 0,17 & 0,10 & 0,16\end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов косвенных затрат 2-го порядка

$$A^{(2)}=A^3=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,4\\ 0,2 & 0,5 & 0,0\\ 0,3 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,23 & 0,12 & 0,20\\ 0,16 & 0,27 & 0,08\\ 0,17 & 0,10 & 0,16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,153 & 0,103 & 0,132\\ 0,126 & 0,159 & 0,800\\ 0,119 & 0,083 & 0,100\end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов полных затрат приближенно равна

$$B\approx E+A+A^2+A^3=\begin{pmatrix}1,683 & 0,323 & 0,732\\ 0,486 & 1,929 & 0,160\\ 0,589 & 0,283 & 1,460\end{pmatrix}.$$

Определим матрицу коэффициентов полных затрат точно. Сначала найдем

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,4\\ 0,2 & 0,5 & 0,0\\ 0,3 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,7 & -0,1 & -0,4\\ -0,2 & 0,5 & -0,0\\ -0,3 & -0,1 & 0,8\end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы E – A

Δ = 0,7 · 0,5 · 0,8 + (–0,4) · (–0,1) · (–0,2) – (–0,4) · 0,5 · (–0,3) — (–0,2) · (–0,1) · 0,8 = 0,196.

и получим матрицу $B=(E-A)^{-1}$:

$$B=\frac{1}{0,196}\begin{pmatrix}0,40 & 0,12 & 0,20\\ 0,16 & 0,10 & 0,33\\ 0,17 & 0,10 & 0,33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2,041 & 0,612 & 1,020\\ 0,816 & 2,245 & 0,408\\ 0,867 & 0,510 & 1,684\end{pmatrix}$$

3. Найдем величины валовой продукции трех отраслей:

$$X = \begin{pmatrix} 2,041 & 0,612 & 1,020 \\ 0,816 & 2,245 & 0,408 \\ 0,867 & 0,510 & 1,684 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775,51 \\ 510,20 \\ 729,59 \end{pmatrix}.$$

5.Запишем уравнение межотраслевого баланса в матричной форме:

$$X - AX = Y$$

Тогда

$$(E - A)X = Y; X = (E - A)^{-1} Y;$$

$$X = (E + A + A^2 + ...)Y = (E - A)^{-1} Y;$$

$$LX = L(E + A + A^2 + ...)Y = TY,$$

где

$$T = L(E + A + A^2 + ...) = L\,(E - A)^{-1};$$

Запишем ценовое уравнение модели Леонтьева (матричная запись): $p = Ap + L\omega$ таким образом,

$$p = L\omega(E - A)^{-1} = \omega L(E + A + A^2 + ...) = \omega T.$$

$$T = (542)\begin{pmatrix} 2,0410,6121,020 \\ 0,8162,2450,408 \\ 0,8670,5101,684 \end{pmatrix} = (12,683\ 13,06\ 10,1)$$

цены по правилу полных затрат

$$p = T\omega = (12,683\ 13,06\ 10,1)$$

Проверка. Другой способ определения продуктивности матрицы А:

$$det\begin{pmatrix} 0,3 - \lambda & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 - \lambda & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - 0,17\lambda - 0,566;$$

Уравнение

$$-\lambda^3 + \lambda^2 - 0,17\lambda - 0,566 = 0$$

Имеет единственный действительный корень лежащая на интервале (-1;0).

Таким образом, спектральный радиус матрицы А меньше единицы, следовательно, она продуктивна.

Литература

1. А. В. Королев Экономико - математические методы
и моделирование Москва ■ Юрайт ■ 2016

2. Алипрандис, К. Существование и оптимальность конкурентного равновесия / К. Алипрандис, Д. Браун, О. Бёркеншо. — М. : Мир, 1995.

3. Ашманов, С. А. Математические модели и методы в экономике / С. А. Ашманов. — М. : Изд-во МГУ, 1980.

4. Гармаш, А. Н. Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. 5. Дубина, И. Н. Основы математического моделирования социально-экономических процессов : учебник и практикум для академического бакалавриата / И. Н. Дубина. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

6. Сотников, В. Н. Экономико-математические методы и модели : учебник для прикладного бакалавриата / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под общ. ред. А. М. Попова. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.