$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ VA GILBERT FAZOSIDA OPTIMAL KVADRATUR FORMULALAR

Mamatova Zilola
Xakimjonova Sarvinoz
Solijonov Ibrohim
Amaliy matematika (sohalar bo'yicha)
yo'nalishi 2-kurs magistratura talabalari
Farg'ona davlat universiteti

ANNOTATSIYA

Kalit so'zlar: $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$**,**Gilbert fazosi,kvadratur formulalar, splaynlar metodi.

Kvadratur formulalar differensial va integral tenglamalarni sonli yechishda muhimvositalardan biri bo'lib hisoblanadi. Ma'lum ma'noda optimal bo'lgan kvadratur formulalarni qurishning yangi algoritmlarini ishlab chiqish, shuningdek, algerbraik va variatsion yondashuvlar asosida turli sinflardagi funksiyalardagi xatolarni baholash hisoblash matemtikasining muhim muammolaridan biridir.

АННОТАЦИЯ

Ключевые слова:$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$,пространство Гильберта, квадратурные формулы, метод сплайнов.

Квадратурные формулы являются одним из важных инструментов численного решения дифференциальных и интегральных уравнений. Разработка новых алгоритмов построения оптимальных в определенном смысле квадратурных формул, а также оценки погрешностей различных классов функций на основе алгебраических и вариационных подходов является одной из важных задач вычислительной математики.

ABSTRACT

Key words: $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$,Gilbert space, quadrature formulas, spline method.

Quadrature formulas are one of the important tools in the numerical solution of differential and integral equations. The development of new algorithms for constructing quadrature formulas that are optimal in a certain sense, as well as the estimation of errors in functions of various classes based on algebraic and variational approaches, is one of the important problems of computational mathematics.

Ma'lumki, kvadratur formulalar aniq untegrallarni sonli hisoblash uchun zarurdir. Shuning uchun kvadratur formulalar differensial va integral tenglamalarni sonli yechishda muhimvositalardan biri bo'lib hisoblanadi. Ma'lum ma'noda optimal bo'lgan kvadratur formulalarni qurishning yangi algoritmlarini ishlab chiqish, shuningdek, algerbraik va variatsion yondashuvlar asosida turli sinflardagi funksiyalardagi xatolarni baholash hisoblash matemtikasining muhim muammolaridan biridir.

Variatsion yondashuvda sonli integratsiya formulalarni optimallashtirish muammosi berilgan funksiya fazosida xatolik funksionali normasining minimumini topish masalasidir. Koeffisentlar va tugunlarga nisbatan xatolik funksionali normasining minimumini topishdan iborat bo'lgan Nikolskiy masalasi va fiksirlangan tugun nuqtalardagi koeffisentlari bo'yicha xatolik funksionali normasining minimumini topishdan iborat Sard masalasi.

Nikolskiy va Sard masalalarining yechimlari mos ravishda Nikolskiy Sard ma'nosida optimal kvadratur formula deb yuritiladi.

Sobolevning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosi orqali $[0,1]$ oraliqda aniqlangan, $(m-1)$-tartibli hosilasigacha uzluksiz va m-tartibli hosilasi $L_2(0,1)$ga tegishli funksiyalar sinfini belgilaymiz. $L_2^{(m)}(0,1)$ sinfi ushbu

$$\langle \varphi,\psi \rangle_m = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x)\cdot \psi^{(m)}(x)\mathrm{d}x \qquad (3.1)$$

Skalyar ko'paytma bilan Gilbert fazosini tashkil etadi. $L_2^{(m)}(0,1)$ Gilbert fazosida (3.1) skalyar ko'paytmaga mos yarim norma quyidagicha kiritiladi:

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m)}} = \left(\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2 dx \right)^{1/2}, \qquad (3.2)$$

$L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida φ funksiya uchun, quyidagi ko'rinishdagi kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta), \qquad (3.3)$$

Bu yerda $C[\beta]$ va x_β mos ravishda (3.1) formulaning koeffisentlari va tugun nuqtalari deb ataladi, φ funksiya esa $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosining elementi. Integral va kvadratur yig'indi orasidagi ayirmaga:

$$(\ell,\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta) \qquad (3.4)$$

bunga (3.3) kvadratur formulaning xatoligi deyiladi. Bu yerda $(\ell,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx$ ga teng. Ushbu ayirma ℓ xatolik funksionali orqali quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x-x_\beta) \ . \qquad (3.5)$$

Bu yerda $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - $[0,1]$ kesmaning xarakteristik funksiyasi, δ esa Dikarning delta funksiyasi.

Koshi-Shvars tengsizligidan ma'lumki, (3.4) xayolik funksionalining absolyut qiymati, ℓ xatilik funksionalining normasi orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\|\ell\|_{L_2^{(m)*}} = \sup_{\|\varphi\|_{L_2^{(m)}}=1} |(\ell,\varphi)| \qquad (3.6)$$

ℓ xatolik funksionali ko'rinishi quyidagicha

$|(\ell,\varphi)| \le \|\varphi\|_{L_2^{(m)}} \|\ell\|_{L_2^{(m)*}}$,

Bu yerda $L_2^{(m)*}(0,1)$ fazosida $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosiga qo'shma fazo.

Sard masalasi $L_2^{(m)}(0,1)$ fazoda optimal kvadratur formula qurish, $C[\beta]$ koeffisentlar va x_β tugun nuqtalar bo'yicha ℓ xatolik funksionali normasiga minimum berish.

Sard masalasi, $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida optimal kvadratur formulani qurishda quyidagi kattalikni xisoblashdan iborat

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\right\|_{L_2^{(m)*}} = \inf_{C[\beta]} \|\ell\|_{L_2^{(m)*}} \qquad (3.7)$$

ya'ni, ℓ xatolik funksionalining (3.6) normasining x_β fiksirlangan tugun nuqtalarda $C[\beta]$ koeffisentlar orqali minimumini topishdan iborat.

Bu masala ikki qismdan tuzilgan: Birinchidan, $L_2^{(m)*}$ fazoda ℓ xatolik funksionalining (3.6) normasini xisoblash va keyin x_β tugun nuqtalari uchun $C[\beta]$ koeffisentlari bo'yicha (3.6) normaning minimumini toppish.

Sard ma'nosidagi optimal kvadratur formulalarni qurishni bir qancha metodlar aniqlangan, masalan, splaynlar metodi, φ - funksiyalar metodi va Sobolev metodi. Turli fazolarda ushbu usularda Sard masalasi ko'plab mualliflar tomonidan o'rganilgan.

Splaynlar metodi. I.Shoenberg Sard ma'nosidagi optimal kvadratur formula va natural splaynlar orasidagi bog'liqliklar ko'rsatgan. Masalan, agar $S(x)$ $[a,b]$da $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ tugunlarni tanlashga nisbatan interpolyatsiya qiluvchi natural splayn xisoblanadi va

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} C_k(x) f(x_k) + Rf(x) \qquad (3.8)$$

Mos keladigan splayn interpolyatsiya formulasi, keyin Sard ma'nosida optimal kvadratur formulasi

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{N} f(x_k) \int_a^b C_k(x)dx + \int_a^b Rf(x)dx\,. \qquad (3.9)$$

Gilbert fazolarida (3.8) ko'rinishdagi optimal interpolyatsion formulalari tuzilgan va bu formulaning ikkala qismini integrallab, Sard ma'nosida (3.9) ko'rinishdagi optimal kvadratur formulalarini olingan.

φ-funksiyalar metodi.

Aytaylik, $f \in H^{r,2}[a,b]$ va $a = x_0 < .... < x_N = b$ bo'lib, bu yerda $H^{r,2}[a,b]$ -

Sobolev fazosi. Har bir $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1,2,...,N$ intervalda,

$$D^r\varphi_k := \varphi_k^{(r)} = 1, \quad k=1,2,...,N$$

Shartni qanoatlantiruvchi φ_k, $k=1,2,...,N$ funksiyani qaraymiz.

Natijada biz quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k^{(r)}(x) f(x)dx \ .$$

Shunday qilib, o'ng tonini qismlarga bo'lib, integrallab quyidagini olamiz

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{r}(-1)^j \varphi_1^{(r-j)}(x_0) f^{(j-1)}(x_0)$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}(\varphi_k - \varphi_{k+1})^{(r-j)}(x_k) f^{(j-1)}(x_k)$$

$$+\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\varphi_n^{(r-j)}(x_N) f^{(j-1)}(x_N) + (-1)^r \int_a^b \varphi(x) f^{(r)}(x)dx,$$

va bundan keyin φ_k, $k=1,2,...,N$, funksiyalar bo'yicha tegishli shartlarni hisobga olgan holda, biz Sard ma'nosidagi turli xil optimal kvadratur formulalarni olishimiz mumkin.

Umumlashgan φ - funksiyalar metodi D^r operator o'rniga umumiyroq chiziqli r tartibli differensial operator qo'llaniladi.

Sobolev metodi. Shuni takidlash kerakki, Sobolev metodi chiziqli differensial operatorning diskret analogini qurishga asoslangan. Ushbu usuldan foydalanish Sard ma'nosida optimal kvadratur formulalarning koeffisentlari uchun analitik formulalarni olish imkonini beradi.

$L_2^{(m)}$ fazoda xatolik funksioanali normasining minimumini topish masalasi Viner-Xopf tipidagi algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi, bu yerda $L_2^{(m)}$ - Sobolev fazosi, har bir funksiya-kvadrati bilan integrallanuvchi, m-tartibli umumlashgan hosilaga ega. Ushbu sistema yechimning mavjudligi va yagonaligini Sobolev tomonidan isbotlangan, optimal formulalarining koeffisentlarini topishning ba'zi analitik algoritmini tasvirlab berdi.

Buning uchun Sobolev Δ^m poligarmonik operatorning $D_{hH}^{(m)}(h\beta)$ diskret analogini aniqladi va o'rgandi. n-o'lchovli holda $D_{hH}^{(m)}(h\beta)$ diskret operatorni qurish masalasi, juda murakkab va ochiq masalalardan biridir. Bir o'lchovli holatda Z.J Jamalov va X.M Shodimetov tomonidan d^{2m}/dx^{2m} differensial operatorning $D_h^{(m)}(h\beta)$ diskret analogi qurilgan. $L_2^{(m)}$ fazoda d^{2m}/dx^{2m} differensial operatorning $D_h^{(m)}(h\beta)$ diskret analogi yordamida quyidagi natijalar olingan: (3.3) ko'rinishidagi optimal kvadratur formula quríldi, hamda ularning koeffisentlarining musbatligi o'rganilgan: vaznli optimal kvadratur formulalari olingan: eyler-Makloren tipidagi optimal kvadratur formulalari o'rganilgan: Splaynlarni yasash masalasi ko'rib chiqildi: Fur'e koeffisentlarini sonli integrallash uchun optimal kvadratur formulalari tuzilgan. E'tibor bering, yuqorida aytib o'tilgan optimal kvadratur formulalari va $L_2^{(m)}$ fazoda tuzilgan splaynlar, har qanday $m-1$ darajali algebraik ko'phadlar uchun aniqdir.

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и оптимальная квадратура в Гильбертовом пространстве формулы

Известно, что квадратурные формулы необходимы для численного вычисления определенных интегралов. Поэтому квадратурные формулы считаются одним из важнейших инструментов численного решения дифференциальных и интегральных уравнений. Разработка новых алгоритмов построения оптимальных в определенном смысле квадратурных формул, а также оценки погрешностей различных классов функций на основе алгебраических и вариационных подходов является одной из важных задач вычислительной математики.

В вариационном подходе задачей оптимизации формул численного интегрирования является задача нахождения минимума нормы функционала ошибки в заданном функциональном пространстве. Задача Никольского, состоящая в нахождении минимума нормы функции ошибок по коэффициентам и узлам, и задача Сарда, состоящая в нахождении минимума нормы функции ошибок по коэффициентам в фиксированных узловых точках. .

Решения задач Никольского и Сарда соответственно рассматриваются как оптимальные квадратурные формулы в смысле Никольского Сарда.

Через пространство Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ $[0,1]$определенное в интервале, $(m-1)$непрерывном до производной -порядка и mопределяющем класс функций, принадлежащих $L_2^{(m)}(0,1)$производной -порядка . $L_2(0,1)$этот класс

$$\langle\varphi,\psi\rangle_m=\int_0^1\varphi^{(m)}(x)\cdot\psi^{(m)}(x)\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

Скалярное умножение образует пространство Гильберта. $L_2^{(m)}(0,1)$В гильбертовом пространстве (3.1) полунорма, соответствующая скалярному произведению, вводится следующим образом:

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m)}}=\left(\int_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2dx\right)^{1/2}, \tag{3.2}$$

$L_2^{(m)}(0,1)$в пространстве φрассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1\varphi(x)dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\varphi(x_\beta), \tag{3.3}$$

Здесь $C[\beta]$и x_βсоответственно (3 .1) называются коэффициентами и узлами формулы, φ и функция $L_2^{(m)}(0,1)$ Элемент пространства Соболева. Разница между интегралом и квадратурной суммой :

$$(\ell,\varphi)=\int_0^1\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\varphi(x_\beta) \tag{3.4}$$

это называется погрешностью квадратурной формулы (3.3). Здесь $(\ell,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx$ к равный Этот разница ℓ ошибка функциональный через определяется как :

$$\ell(x)=\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\delta(x-x_\beta). \qquad (3,5)$$

Здесь $\varepsilon_{[0,1]}(x)$-$[0,1]$ не режь характеристика функция и δ Дельта -функция Дикара .

Из неравенства Коши-Шварца известно, что (3.4) мнимого функционала абсолютный значение , ℓ линейность функциональности норма выражается как :

$$\|\ell\|_{L_2^{(m)*}}=\sup_{\|\varphi\|_{L_2^{(m)}}=1}|(\ell,\varphi)| \qquad (3,6)$$

ℓ ошибка функциональный появление следующее

$|(\ell,\varphi)|\le\|\varphi\|_{L_2^{(m)}}\|\ell\|_{L_2^{(m)*}}$,

Здесь $L_2^{(m)*}(0,1)$ в космосе $L_2^{(m)}(0,1)$ космос совместное пространство.

Сард проблема $L_2^{(m)}(0,1)$ построение оптимальной квадратурной формулы в пространстве , $C[\beta]$ коэффициенты и x_β узел очки в соответствии с ℓ ошибка функциональный дайте минимум норме .

Сард выпуск $L_2^{(m)}(0,1)$ Оптимальная квадратурная формула в пространстве состоит из вычисления следующей величины

$$\left\|\mathring{\ell}\right\|_{L_2^{(m)*}}=\inf_{C[\beta]}\|\ell\|_{L_2^{(m)*}} \tag{3,7}$$

то есть , ℓ ошибка нормы функционала (3.6). x_β зафиксированный узел в точках $C[\beta]$ коэффициенты через это найти минимум .

Этот вопрос состоит из двух частей построено : Во-первых , $L_2^{(m)*}$ в космосе ℓ ошибка вычисление нормы функционала (3.6). и после x_β узел очки для $C[\beta]$ коэффициенты найти минимум нормы согласно (3.6) .

Выявлено несколько методов построения оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда, например , сплайны метод , φ- функции метод и Соболев метод . Вопрос о Сарде по-разному исследовался многими авторами.

Метод сплайнов. И. Шёнберг показал связь между оптимальной квадратурной формулой по Сарду и натуральными сплайнами. Например, если

$s(x)$ Интерполирующий $[a,b]$натуральный сплайн рассчитывается с учетом выбора узлов в и$\{x_k\}_{k=0}^N$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N}C_k(x)f(x_k)+Rf(x) \qquad (3,8)$$

Соответствующая формула сплайн-интерполяции является тогда оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда.

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{N}f(x_k)\int_a^b C_k(x)dx+\int_a^b Rf(x)dx. \qquad (3,9)$$

Были построены оптимальные интерполяционные формулы вида (3.8) в пространствах Гильберта, а путем интегрирования обеих частей этой формулы получены оптимальные квадратурные формулы вида (3.9) в смысле Сарда.

φ-метод функций.

Предположим, что $f\in H^{r,2}[a,b]$и $a=x_0<....<x_N=b$— $H^{r,2}[a,b]$ пространство Соболева. В каждом $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,...,N$ интервале ,

$D^r\varphi_k:=\varphi_k^{(r)}=1,\quad k=1,2,...,N$

Состояние удовлетворительный φ_k, $k=1,2,...,N$ функция давайте посмотрим .

Как результат мы к следующим иметь мы будем :

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\varphi_k^{(r)}(x)f(x)dx.$$

Так так что , верно тон части и интегрированный следующее мы можем

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{j=1}^{r}(-1)^j\varphi_1^{(r-j)}(x_0)f^{(j-1)}(x_0)$$
$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}(\varphi_k-\varphi_{k+1})^{(r-j)}(x_k)f^{(j-1)}(x_k)$$
$$+\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\varphi_n^{(r-j)}(x_N)f^{(j-1)}(x_N)+(-1)^r\int_a^b\varphi(x)f^{(r)}(x)dx,$$

и из этого после φ_k, $k=1,2,...,N$, функции согласно принадлежит условия счет полученный без , мы Сард значение другой другой оптимальный квадратура формулы мы получаем может

Обобщенный φ- функции метод D^rвместо оператора более общий линейный r чтобы используется дифференциальный оператор .

Соболев метод . Следует отметить, что метод Соболева основан на построении дискретного аналога линейного дифференциального оператора. Использование этого метода позволяет получить аналитические формулы для коэффициентов оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда .

$L_2^{(m)}$ задача нахождения минимума нормы погрешности функционального анализа в пространстве сведена к системе алгебраических уравнений типа

Винера-Хопфа, где $L_2^{(m)}$-пространство Соболева, интегрируемое с каждой функцией-квадратом, m имеет -порядок обобщенного производная. Существование и единственность этой системы доказал Соболев, описав некоторый аналитический алгоритм нахождения коэффициентов оптимальных формул.

полигармонического оператора Соболева Δ^m $D_{hH}^{(m)}(h\beta)$ идентифицировал и изучил дискретный аналог. n- размерный без $D_{hH}^{(m)}(h\beta)$ дискретный Вопрос построения оператора является одним из наиболее сложных и открытых вопросов. Один измеренный дискретный дифференциальный оператор $D_h^{(m)}(h\beta)$ в случае З.Дж. Джамалова и Х.М. Шодиметова d^{2m}/dx^{2m} аналоговый построен $L_2^{(m)}$ в космосе d^{2m}/dx^{2m} дискретность дифференциального оператора $D_h^{(m)}(h\beta)$ аналоговый с использованием следующее результаты получено : построена оптимальная квадратурная формула в виде (3.3) и исследована положительность их коэффициентов: получены взвешенные оптимальные квадратурные формулы: изучены оптимальные квадратурные формулы типа Эйлера-Маклорена: вопрос создания рассмотрены сплайны: сформулированы оптимальные квадратурные формулы коэффициентов Фурье для численного интегрирования. Отметим, что упомянутые выше оптимальные квадратурные формулы и $L_2^{(m)}$ пространственные сплайны $m-1$точны для алгебраических многочленов любой степени.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati:

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1-qism. – T.: «O'zbekiston», 2003.
2. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 2-qism. - T.: « O'qituvchi», 2008.
3. Ismatullayev G. Koshergenova M. Hisoblash usullari. – T.:«TAFAKKUR-BO'STONI», 2014.
4. https://byjus.com/