FUNKSIONAL FAZOLAR. $L_2^{(m)}(0,1)$ VA $W_2^{(m)}(0,1)$ FAZOLAR

Mamatova Zilola
Xakimjonova Sarvinoz
Amaliy matematika (sohalar bo'yicha)
yo'nalishi 2-kurs magistratura talabasi
Farg'ona davlat universiteti
Mamalatipov Odiljon
Muhammad al-xorazmiy nomidagi
TATUFF akademik litseyi
matematika fani o'qituvchisi

ANNOTATSIYA

Kalit so'zlar: $L_2^{(m)}(0,1)$ va $W_2^{(m)}(0,1)$ fazosi,kvadratur formulalar, splaynlar metodi, funksional fazolar.

Kvadratur formulalar differensial va integral tenglamalarni sonli yechishda muhimvositalardan biri bo'lib hisoblanadi. Ma'lum ma'noda optimal bo'lgan kvadratur formulalarni qurishning yangi algoritmlarini ishlab chiqish, shuningdek, algerbraik va variatsion yondashuvlar asosida turli sinflardagi funksiyalardagi xatolarni baholash hisoblash matemtikasining muhim muammolaridan biridir.

АННОТАЦИЯ

Ключевые слова: $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m)}(0,1)$,пространство Гильберта, квадратурные формулы, метод сплайнов, функциональные пространства.

Квадратурные формулы являются одним из важных инструментов численного решения дифференциальных и интегральных уравнений. Разработка новых алгоритмов построения оптимальных в определенном смысле квадратурных формул, а также оценки погрешностей различных классов функций на основе алгебраических и вариационных подходов является одной из важных задач вычислительной математики.

ABSTRACT

Key words: $L_2^{(m)}(0,1)$ and $W_2^{(m)}(0,1)$ spaces,Gilbert space, quadrature formulas, spline method.

Quadrature formulas are one of the important tools in the numerical solution of differential and integral equations. The development of new algorithms for constructing quadrature formulas that are optimal in a certain sense, as well as the estimation of errors in functions of various classes based on algebraic and variational approaches, is one of the important problems of computational mathematics.

Funksional fazolar bu amallar bilan birgalikdagi funksiyalar majmuasidir. Masalan,

$$C(\Omega)=C^0(\Omega)=\{u(x),\ \Omega \text{ да узлуксиз функция}\}, \qquad (1)$$

bu Ω da uzluksiz bo'lgan funksiyalarni o'z ichiga oladi, bunda Ω funksiyalar

aniqlangan soha, ya'ni $\Omega = [0, 1]$. Bu fazo chiziqli, chunki ixtiyoriy haqiqiy α va β sonlar va $u_1 \in C(\Omega)$ va $u_2 \in C(\Omega)$ lar uchun $\alpha u_1 + \beta u_2 \in C(\Omega)$ ga ega bo'lamiz.
Bir o'lchovli holda birinchi tartibli hosilasi bilan uzluksiz funksional fazo bu

$$C^1(\Omega) = \{u(x), u'(x),\ \Omega\ \text{да узлуксиз функциялар}\}, \tag{2}$$

va huddi shunday

$$C^m(\Omega) = \{u(x), u'(x), \ldots, u^{(m)}(x),\ \Omega\ \text{да узлуксиз функциялар}\}. \tag{3}$$

Malumki,

$$C^0 \supset C^1 \supset \ldots \supset C^m \supset \ldots\ . \tag{4}$$

U holda $m \to \infty$ да quyidagini aniqlaymiz

$$C^\infty(\Omega) = \{u(x)\ \text{функция}\ \Omega\ \text{да чексиз дифференциалланувчи}\}\ . \tag{5}$$

Masalan, e^x, $\sin x$, $\cos x$ va ko'phadlar $C^\infty(-\infty, \infty)$ ga tegishli, ammo $\log x$, $\tan x$, $\cot x$ kabi ba'zi boshqa elementar funksiyalar agar $x = 0$ nuqta sohaga tegishli bo'lsa u fazoga tegishli emas.

Ko'p o'lchovli fazolar va ko'p indeksli belgilashlar

Endi ko'p o'lvhovli $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ funksiya va hususiy hosilalar uchun ifodalarni soddalashtiradigan mos ko'p indeksli belgilashlarni qaraymiz. Biz R^n dagi butun vektor uchun $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$ deb yozishimiz mumkin. Masalan, agar n = 5, u holda $\alpha = (1, 2, 0, 0, 2)$ -bu mumkin bo'lgan vektorlardan biri. Hususiy hosilalarni quyidagicha oson ko'rsatish mumkin.

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},\ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,\ \alpha_i \geq 0 \tag{6}$$

Bu ko'p indeksli deb aytiladigan yozuvdir.

Misol 1. n = 2 va $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ lar uchun $|\alpha| = 2$ bo'lganda barcha mumkin bo'lgan $D^\alpha u$ hususiy hosilalar quyidagiga teng.

$$\alpha = (2,0), \quad D^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

$$\alpha = (1,1), \quad D^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\alpha = (0,2), \quad D^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Ko'p indeksli yozuvda C^m fazoni $\Omega \in R^n$ sohada quyidagicha aniqlash mumkin.

$$C^m(\Omega) = \{u(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ D^\alpha u\ (|\alpha| \leq m),\ \Omega\ \text{да узлуксиз}\} \tag{7}$$

Ya'ni m – tartibligicha barcha mumkin bo'lgan hosilalari Ω da uzluksiz.

Misol 2. n = 2 va m = 3 uchun, agar $u \in C^3(\Omega)$ bo'lsa barchasi Ω da uzluksiz bo'lgan u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy} va u_{yyy} ga ega bo'lamiz, yoki oddiygina $|\alpha| \leq 3$ uchun $D^\alpha u \in C^3(\omega)$. $C^m(\Omega)$ cheksiz o'lchovli ekanligini ta'kidlaymiz.

$C^0(\Omega)$ da masofa quyidagicha aniqlanadi

$$d(u,v)=\max_{x\in\Omega}\left|u(x)-v(x)\right|$$

U quyidagi hossalarga ega (1), $d(u,v)\geq 0$; (2), $d(u,v)=0$ faqat va faqat $u\equiv v$ bo'lsa: va (3), $d(u,v+w)\leq d(u,v)+d(u,w)$ uchburchak tengsizligi. Chiziqli fazo unda aniqlangan masofa bilan metrik fazo deyiladi.

$C^0(\Omega)$ da norma bu uning quyidagi shartni qanoatlantiruvchi manfiymas funksiyadir

$$\left\|u(x)\right\|=d(u,\theta)=\max_{x\in\Omega}\left|u(x)\right|,\ \textit{бу ерда }\ \theta\ \textit{ноль элемент}$$

Ushbu xossalar bilan birga (1), $\| u(x)\|\geq 0$, va $\| u(x)\|=0$ faqat va faqat $u\equiv 0$ bo'lganda:

$(2), \left\|\alpha u(x)\right\|=\left|\alpha\right|\left\|u(x)\right\|,\ \textit{бу ерда } \alpha-\textit{сон};$

$(3), \left\|u(x)+v(x)\right\|\leq\left\|u(x)\right\|+\left\|v(x)\right\|,\ \textit{учбурчак тенгсизлиги.}$

Aniqalangan norma bilan birgalikda chiziqli fazo normalangan fazo deyiladi. $C^m(\Omega)$ da masofa va norma quyidagicha aniqlanadi.

$$d(u,v)=\max_{0\leq|\alpha|\leq m}\ \max_{x\in\Omega}\left|D^\alpha u(x)-D^\alpha v(x)\right|\ , \tag{8}$$

$$\left\|u(x)\right\|=\max_{0\leq|\alpha|\leq m}\ \max_{x\in\Omega}\left|D^\alpha u\right|\ . \tag{9}$$

Функциональные пространства с этими операциями вместе функции является сложным . Например ,

$$C(\Omega)=C^0(\Omega)=\left\{u(x),\ \Omega\ \textit{да узлуксиз функция}\right\}, \tag{1}$$

сюда входят функции, непрерывные на Ω , где Ω — область, в которой определены функции, т. е. Ω = [0, 1]. Это пространство является линейным, поскольку произвольные действительные α числа β и $u_1\in C(\Omega)$ и $u_2\in C(\Omega)$ для S $\alpha u_1+\beta u_2\in C(\Omega)$ у нас есть.

Один измеренный без первый чтобы производная с постоянно функциональный космос этот

$$C^1(\Omega)=\left\{u(x),\ u'(x),\ \Omega\ \textit{да узлуксиз функциялар}\right\}, \tag{2}$$

и просто так так

$$C^m(\Omega)=\left\{u(x),u'(x),...,u^{(m)}(x),\ \Omega\ \textit{да узлуксиз функциялар}\right\}. \tag{3}$$

Как вы знаете ,

$$C^0\supset C^1\supset...\supset C^m\supset.... \tag{4}$$

В этом случае $m\to\infty$ в следующее давай выясним

$$C^{\infty}(\Omega)=\{u(x)\ функция\ \Omega\ да\ чексиз\ дифференциалланувчи\}\ . \qquad (5)$$

Например, полиномы e^x, $\sin x$, $\cos x$ и $C^{\infty}(-\infty,\infty)$ принадлежат , но $\log x$ некоторые другие элементарные функции, такие как $x=0$, $\tan x$, $\cot x$ не принадлежат пространству, если точка принадлежит области определения.

Многомерные пространства и многоиндексные b -значения

Теперь мы рассмотрим подходящие многоиндексные обозначения, которые упрощают выражения для полиномов $u(x)=u(x_1,x_2,...,x_n)$, $x\in R^n$ функций и специальных производных. Мы R^n можем написать $\alpha_i\geq 0$ это $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ для всего вектора в Например, если n = 5, то $\alpha=(1,2,0,0,2)$ - один из возможных векторов. Специальные производные можно легко показать следующим образом.

$$D^{\alpha}u(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}},\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n,\ \alpha_i\geq 0 \qquad (6)$$

Эта запись называется мультииндексированной.

Пример 1. Для $|\alpha|=2n$ = 2 и $u(x)=(u_1(x),u_2(x))$ все возможные $D^{\alpha}u$ частные производные равны

$$\alpha=(2,0),\quad D^{\alpha}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

$$\alpha=(1,1),\quad D^{\alpha}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$\alpha=(0,2),\quad D^{\alpha}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

В многоиндексной нотации C^m пробел $\Omega\in R^n$ можно определить в поле следующим образом.

$$C^m(\Omega)=\{u(x_1,x_2,...,x_n),\ D^{\alpha}u\ (|\alpha|\leq m),\ \Omega\ да\ узлуксиз\} \qquad (7)$$

То есть все возможные производные от m равны Ω непрерывный в .

Пример 2. Для n = 2 и m = 3, если $u\in C^3(\Omega)u$, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy} и u непрерывны в Ω, мы получаем $|\alpha|\leq 3_{yyy}$*, или просто* для $D^{\alpha}u\in C^3(\omega)$.

$C^m(\Omega)$ заметим, что оно бесконечномерно.

$C^0(\Omega)$ расстояние определяется следующим образом

$$d(u,v)=\max_{x\in\Omega}|u(x)-v(x)|$$

Он обладает следующими свойствами (1), $d(u,v)\geq 0$; (2) $d(u,v)=0$ тогда и только $u\equiv v$ тогда, когда: и (3) $d(u,v+w)\leq d(u,v)+d(u,w)$ неравенство треугольника. Линейное пространство с определенным расстоянием в нем называется метрическим пространством.

$C^0(\Omega)$ нормой является ее неотрицательная функция, удовлетворяющая следующему условию

$$\|u(x)\| = d(u,\theta) = \max_{x\in\Omega}|u(x)|, \text{ бу ерда } \theta \text{ ноль элемент}$$

Наряду с этими свойствами (1), $\| u(x) \| \geq 0$, и$\| u(x) \| = 0$ только и только $u \equiv 0$ когда :

$(2), \|\alpha u(x)\| = |\alpha|\|u(x)\|, \text{ бу ерда } \alpha - \text{сон}$;

$(3), \|u(x)+v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\|, \text{ учбурчак тенгсизлиги.}$

Линейное пространство вместе с определенной нормой называется нормализованным пространством i. $C^m(\Omega)$ Расстояние и норма определяются следующим образом .

$$d(u,v) = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \max_{x\in\Omega}\left|D^\alpha u(x) - D^\alpha v(x)\right| , \tag{8}$$

$$\|u(x)\| = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \max_{x\in\Omega}\left|D^\alpha u\right| . \tag{9}$$

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati:

1. *Isroilov M.I.* Hisoblash metodlari. 1-qism. – T.: «O‘zbekiston», 2003.
2. *Isroilov M.I.* Hisoblash metodlari. 2-qism. - T.: « O‘qituvchi», 2008.
3. *Ismatullayev G. Koshergenova M.* Hisoblash usullari. – T.:«TAFAKKUR-BO‘STONI», 2014.
4. https://byjus.com/