ISSN 2181-3187

BIRINCHI VA IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR YECHISHNING KLASSIK VA ZAMONAVIY USULLARINI BIR BIRIGA BOG'LIQLIGI VA ULARNING YECHIMLARI

Jonqobilov Jahongir Tirkashevich
jonqobilovjaxongir@mail.ru
Toshkent davlat texnika universiteti Olmaliq filiali, assistent

Annotatsiya: Ushbu maqolada birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni yechishning klassik va zamonaviy usullari o'rtasidagi bog'liqlik va ularning yechimlaridagi farqlar ko'rib chiqiladi. Klassik usullar analitik yechimlarga asoslangan bo‘lsa, zamonaviy usullar sonli metodlar orqali murakkab tenglamalarni yechishda qo‘llaniladi. Klassik va zamonaviy usullar o‘rtasidagi aloqadorlik tushuntiriladi va ularning matematik modellashtirishdagi o‘rni tahlil qilinadi. Zamonaviy usullar kompyuter yordamida katta va murakkab tizimlarni modellashtirish uchun katta imkoniyatlar yaratadi.

Kalit so‘zlar: Karra koeffitsientlar usuli,Gomogen va nogomogen tenglamalarni yechish, Finite element usuli, analitik yechim, Chegaraviy qiymat usullari.

Kirish.

Differensial tenglamalar ko'plab fizik, texnologik va muhandislik jarayonlarini modellashtirish uchun ishlatiladi. Ular obyektlar yoki tizimlarning o'zgarishini tavsiflashda ishlatiladi. Birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalar analitik yechimlar orqali klassik usullar bilan hal etilgan bo‘lsa, zamonaviy texnologiyalar va murakkab tizimlar rivojlanishi bilan ularni yechish uchun zamonaviy usullar, ayniqsa, sonli metodlar keng qo‘llanila boshlandi. Ushbu maqolada klassik va zamonaviy usullarni ko‘rib chiqamiz, ularning farqlari va bog‘liqliklarini tahlil qilamiz.

Metodika tahlil:

1. Birinchi Tartibli Differensial Tenglamalar

Klassik usullar: ko‘pincha ko‘plab fizik, kimyoviy va texnologik jarayonlarni tavsiflashda ishlatiladi. Klassik usullar birinchi tartibli tenglamalarni analitik yechishda keng qo‘llaniladi. Ularning ichida **ajratilgan o'zgaruvchilar usuli** va **integratsiya usuli** eng ko‘p ishlatiladigan usullardandir. Bu usullarni kengroq tushuntirish orqali maqolangizning mohiyatini ochib berishga yordam beraman.

- **Ajratilgan o‘zgaruvchilar usuli:** Ajratilgan o‘zgaruvchilar usuli – birinchi tartibli differensial tenglamalarni yechishda eng asosiy va sodda usullardan biri

ISSN 2181-3187

hisoblanadi. Bu usul o‘zgaruvchilarni alohida- ajratilgan ko‘rinishda taqdim qilishga asoslangan bo‘lib, quyidagi ko'rinishda bo'lgan tenglamalarda qo‘llaniladi:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

1.

Bu yerda f(x) faqat x o‘zgaruvchiga bog‘liq, g(y) esa faqat yyy o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘ladi. Usulning mohiyati shundaki, o‘zgaruvchilarni ajratish orqali tenglamani ikki qismga bo‘lamiz:

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

2.

Keyin har bir qismini alohida integrallaymiz:

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

3.

Ushbu usulda ajratilgan o‘zgaruvchilarni integratsiya qilish natijasida yechim topiladi. Ushbu usul faqatgina o‘zgaruvchilar ajratilishi mumkin bo‘lgan tenglamalar uchun qo‘llaniladi, lekin juda ko‘p oddiy tizimlar uchun samarali hisoblanadi.

Amaliy Misol: Quyidagi oddiy tenglamani yechib ko‘raylik.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

O‘zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx$$

Integrallash natijasi:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2xdx$$

$$ln \mid y \mid = x^2 + C$$

Yechimni y ga nisbatan ifodalaymiz:

$$y = Ce^{x^2}$$

Bu ajratilgan o‘zgaruvchilar usuli orqali topilgan umumiy yechimdir.

•**Integratsiya usuli.** Integratsiya usuli ham birinchi tartibli differensial tenglamalarni yechishda ishlatiladi, lekin u qo‘shimcha qadamlarni talab qiladi. Oddiy integratsiya usuli to‘g‘ri chiziqli tenglamalar uchun ishlatiladi, bu tenglamalar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

ISSN 2181-3187

Bu yerda P(x) va Q(x) - x ga bog‘liq funksiya. Integratsiya usuli yordamida bu tenglamani yechishda quyidagi qadamlar ko‘riladi:

Tenglamani birinchi qadamda integrallanuvchi faktor bilan ko‘paytirish kerak bo‘ladi:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \qquad 4.$$

Tenglamaning har bir qismini integrallanuvchi factor μ(x) ga ko‘paytiramiz:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x) \qquad 5.$$

Tenglama endi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x) \qquad 6.$$

Endi bu tenglamani to‘liq integrallashtiramiz:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx + C \qquad 7.$$

Bu yerda C – ixtiyoriy konstantadir. Keyin yechimni y ga nisbatan topamiz:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)dx + C\right) \qquad 8.$$

Ajratilgan o‘zgaruvchilar usuli va **integratsiya usuli** birinchi tartibli differensial tenglamalarni yechishning klassik usullari bo‘lib, ular oddiy fizik va matematik jarayonlarni modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Ajratilgan o‘zgaruvchilar usuli to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘zgaruvchilarni ajratib integrallash orqali ishlatilsa, integratsiya usuli murakkabroq tenglamalar uchun qo‘llaniladi. Ushbu usullarni tushunish zamonaviy sonli usullarga asos yaratadi va ko‘plab muhandislik masalalarini yechishda foydali bo‘ladi.

1. **Ikkinchi Tartibli Differensial Tenglamalar:**

Karra koeffitsientlar usuli: Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar ko'pincha fizik muammolarni hal qilishda, ayniqsa, tebranish, issiqlik o'tkazish, va elektromagnit jarayonlarni modellashtirishda ishlatiladi. Klassik usullardan biri bu karra koeffitsientlar usuli bo‘lib, u ko‘pincha ikkinchi tartibli tenglamalarni hal qilish uchun ishlatiladi. Tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \qquad 9.$$

Bu tenglama xarakteristik tenglamaga o‘tkaziladi:

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad 10.$$

Xarakteristik tenglamani yechib, umumiy yechim topiladi. Agar diskriminant musbat bo‘lsa, ikki real ildizga ega bo‘ladi va yechim quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \qquad 11.$$

Bu yerda r_1 va r_2 – xarakteristik tenglamaning ildizlari, C_1 va C_2 – ixtiyoriy konstantalar.

Misol: Quyidagi tenglamani ko‘rib chiqaylik:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Xarakteristik tenglama quyidagicha bo‘ladi:

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

U holda umumiy yechim quyidagicha bo‘ladi:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Ikkita bir xil real ildiz: Agar diskriminant nolga teng bo‘lsa, xarakteristik tenglama ikkita bir xil real ildizga ega bo‘ladi. Bunday holda umumiy yechim quyidagicha yoziladi:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{rx} \qquad 12.$$

Ikkita kompleks ildiz: Agar diskriminant manfiy bo‘lsa, tenglama ikkita kompleks ildizga ega bo‘ladi. Ildizlar quyidagicha bo‘ladi:

$$r = \alpha + i\beta$$

Bunday holda umumiy yechim quyidagi trigonometrik funksiyalarda ifodalanadi:

$$y(x) = e^{ax}(C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x)) \qquad 13.$$

Gomogen va nogomogen tenglamalarni yechish:

Gomogen tenglamalar – o‘ng tomoni nolga teng bo‘lgan tenglamalar bo‘lib, ularning umumiy ko‘rinishi quyidagicha:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \qquad 14.$$

Gomogen tenglamalar klassik usullar bilan yechiladi va umumiy yechimni topishda yuqorida ko‘rib o‘tilgan karra koeffitsientlar usuli qo‘llaniladi.

Nogomogen tenglamalar – o‘ng tomonida nol bo‘lmagan tenglamalar bo‘lib, quyidagi ko‘rinishga ega:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x) \qquad 15.$$

Bu yerda f(x) tenglamaning o‘ng tomonida berilgan funksiya. Nogomogen tenglamalar uchun umumiy yechim ikki qismdan iborat bo‘ladi:

- **Homogen tenglama uchun umumiy yechim.**
- **Maxsus yechim (nogomogen qism uchun).**

ISSN 2181-3187

Maxsus yechimni topish uchun turli usullar, masalan, **o'zgaruvchi koeffitsientlar usuli** yoki **maxsus funksiyalar usuli** ishlatiladi. Misol uchun, agar o'ng tomonda sinus yoki kosinus funksiyasi bo'lsa, yechimni shu funksiyaga mos xususiy yechim orqali topish mumkin.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar ko'pincha muhandislik, fizika va boshqa ilmiy jarayonlarni modellashtirish uchun qo'llaniladi. **Karra koeffitsientlar usuli** oddiy differensial tenglamalarni yechish uchun juda samarali bo'lib, turli holatlar uchun umumiy yechimlarni topishda ishlatiladi. G**omogen va nogomogen tenglamalar** klassik tenglamalardan farqli o'laroq, nohogen qism uchun maxsus yechimlarni talab qiladi. Ushbu usullarni tushunish zamonaviy matematik modellashtirishda katta ahamiyatga ega bo'lib, ko'plab ilmiy va texnik muammolarni yechishda qo'llaniladi.

3. Zamonaviy usullar. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni yechishda klassik usullar ko'pincha aniq analitik yechimlar beradi, ammo real dunyoda ko'plab masalalar juda murakkab bo'lib, bunday tenglamalarning analitik yechimlarini topish qiyin yoki imkonsiz bo'lishi mumkin. Shu sababli, **zamonaviy sonli metodlar** bu tenglamalarni yechishda keng qo'llaniladi. Quyida ushbu usullarning ikki turi – **finite element usuli** va **chegaraviy qiymat usullari** – haqida batafsil ma'lumot keltiriladi.

a) Finite Element Usuli (FEM)

Finite Element Usuli (FEM) – bu murakkab geometriyalar va murakkab yuklanish sharoitlarini modellashtirish uchun ishlatiladigan zamonaviy matematik yondashuv. Bu usul ko'pincha muhandislik, fizika va boshqa texnik fanlarda qo'llaniladi, ayniqsa, konstruksiyalarni tahlil qilish, suyuqlik mexanikasi, elektromagnit maydonlar va boshqa ko'plab sohalarda.

Finite element usuli differensial tenglamalarni yechish uchun maydonni kichik, oddiy shakllarga ajratib, har bir shaklda (elementda) tenglamani yechishni o'z ichiga oladi. Bu kichik elementlarning yechimlari umumiy maydon bo'ylab birlashtiriladi va butun maydonning yechimi olinadi. Bu yondashuv quyidagi qadamlarni o'z ichiga oladi:

- **Bo'lish (discretization):** Geometriyani kichik elementlarga (masalan, uchburchaklar yoki to'rtburchaklar) bo'linadi.
- **Element tenglamalari:** Har bir element uchun tenglamalar yaratiladi va ularning chegaraviy qiymatlari hisobga olinadi.
- **Yechim:** Har bir element bo'yicha tenglamalar yechilib, umumiy maydon bo'yicha natija yig'iladi.

ISSN 2181-3187

Finite element usuli ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun o‘ta samarali bo‘lib, ularni aniq yechimlarini topish qiyin bo‘lgan murakkab tizimlarda ham qo‘llaniladi.

Amaliy qo‘llanilishi:

- **Konstruksiyalar tahlili:** Finite element usuli konstruksiyalarning mexanik holatini, masalan, kuchlanish va deformatsiyalarni tahlil qilishda ishlatiladi.
- **Suyuqlik mexanikasi:** Suyuqlikning oqishini modellashtirishda (Navier-Stokes tenglamalariga asoslangan holda) FEM keng qo‘llaniladi.
- **Elektronika va elektromagnitizm:** Elektr maydonlari va elektromagnit to‘lqinlarning tarqalishi finite element usuli orqali tahlil qilinadi. [11 p 39-41]

b) Chegaraviy Qiymat Usullari (Boundary Value Problems)

Chegaraviy qiymat usullari (BVP) differensial tenglamalarni hal qilishda chegara shartlariga asoslangan usullar bo‘lib, ko‘pincha muhandislik va fanlarda qo‘llaniladi. Bu usulda tenglamaning yechimi butun bir intervalda topilishi kerak, bu intervallarda chegaraviy shartlar belgilangan bo‘ladi. Bu shartlar ko‘pincha fizik va texnik jarayonlarni ifodalaydi.

Chegaraviy qiymat usullari differensial tenglamalar uchun muhim bo‘lgan sonli metodlar hisoblanadi, chunki ko‘plab muhandislik masalalari (masalan, issiqlik tarqalishi, suyuqlik oqimi, elastiklik) aynan chegaraviy qiymat masalalari bo‘lib keladi.

Masalan:

- **Issiqlik tarqalishi:** Masalan, tayoqcha bir uchida berilgan haroratda ushlab turilgan bo‘lsa va ikkinchi uchi issiqlik oqimini hisoblashda FEM va BVP usullari yordamida issiqlik o‘tkazish differensial tenglamasi hal qilinadi.
- **Elektromagnit maydonlar:** Elektromagnit to‘lqinlar tarqalishini modellashtirishda chegaraviy shartlarga asoslangan sonli yechimlar ishlatiladi.

Chegaraviy qiymat usullari tenglamalarni sonli yechishda quyidagi bosqichlarni o‘z ichiga oladi:

- **Bo‘laklarga ajratish (discretization):** Xuddi finite element usuli kabi, maydonni yoki tizimni kichik bo‘laklarga ajratish.
- **Differensial tenglamalarni yechish:** Har bir bo‘lak uchun tenglamani sonli metodlar yordamida yechish.
- **Chegaraviy shartlar qo‘llash:** Barcha bo‘laklar bo‘yicha yechimlarni umumlashtirish va natijada butun tizim bo‘yicha yechim olish.

Amaliy qo‘llanilishi:

- **Suyuqliklar harakati:** Suyuqliklar va gazlarning oqishini modellashtirishda.
- **Issiqlik muammolari:** Energiya saqlanishi va issiqlik tarqalishiga oid masalalarda.
- **Mexanik konstruksiyalar:** Mashina qismlarida yuk ta’sirida hosil bo‘ladigan kuchlanish va deformatsiyalarni hisoblashda ishlatiladi.

Xulosa: Birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni yechish usullari zamonaviy texnologiya va fan sohalarida katta ahamiyatga ega. Klassik usullar, masalan, ajratilgan o‘zgaruvchilar va integratsiya usullari oddiy differensial tenglamalarni analitik yechishda samarali bo‘lsa-da, zamonaviy texnologiyalar rivojlanishi bilan murakkabroq jarayonlarni yechish uchun sonli metodlar qo‘llanila boshlandi.

Finite element usuli va chegaraviy qiymat usullari kabi zamonaviy usullar murakkab geometrik shakllar, fizikaviy jarayonlar va nozik texnologik tizimlarni modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Ular orqali texnika va muhandislik sohalaridagi real dunyo masalalari, masalan, issiqlik o‘tkazish, suyuqlik mexanikasi, va mexanik konstruksiyalar kabi jarayonlar aniq modellashtiriladi va tahlil qilinadi.

Shunday qilib, klassik va zamonaviy usullar bir-birini to‘ldirib, differensial tenglamalar bilan ishlashda keng imkoniyatlar yaratadi. Murakkab texnologik va ilmiy muammolarni hal qilishda bu usullarni qo‘llash natijasida samaradorlik oshadi va tizimlarning to‘g‘ri ishlashi ta’minlanadi. Kelajakda ushbu usullarni yanada chuqurroq qo‘llash, murakkab tizimlar bilan ishlashda innovatsion yondashuvlar yaratish imkonini beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. **L. D. Landau, E. M. Lifshitz** - "Statik Mexanika," Fizmatlit, 2001. Issiqlik o'tkazish va diffuziya jarayonlarining fizikaviy asoslarini tushuntirish uchun.
2. **Reddy, J. N.** - "An Introduction to the Finite Element Method," McGraw-Hill, 2006. Finite element usuli asoslari va ularning muhandislikda qo‘llanilishi.
3. **Kreyszig, E.** - "Advanced Engineering Mathematics," Wiley, 2011. Zamonaviy matematik usullar va ularning muhandislik sohalaridagi qo‘llanilishi.
4. **Boyce, W. E., DiPrima, R. C.** - "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems," John Wiley & Sons, 2017. Differensial tenglamalar va chegaraviy qiymat masalalarini yechishning asosiy usullari haqida.
5. *Jonqobilov, J.T.. Texnologik Jarayonlarni Monitoring Qilish Va Vizualizatsiya Usullari. 192-201*
6. *Manshurov, Sh.T.; Jonqobilov, J.T.. C++ Dasturlarlash Tilida n-Xonali Palindromik Sonlarni Topish. 173-178*

7. *Djabbarov, Odil Djurayevich; Jonqobilov, Jahongir Tirkashevich. TRIGONOMETRIK FUNKSIYALARNI EKVIVALENT TA'RIFI HAQIDA. 581-585*
8. *Муминов, Ф. М., Душатов, Н. Т., Миратоев, З. М., & Ибодуллаева, М. Ш. ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА. Innovative, educational, natural and social sciences, 2(6), 606-612.*
9. *FM Muminov, NT Dushatov, ZM Miratoev. ON THE FORMULATION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ONE SECOND-ORDER EQUATION. American Journal Of Applied Science And Technology. 4(6), 58-63*
10. *Муминов Ф.М., Каримов С.Я., Утабов У нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 2 ISSUE 11 ISSN 2181-1784 SJIF 2022:*
11. Safarmatov Uchqun Sohibjon o'g'li. Nasirov Tulkun Zakirovich. 2020 структура открытого виртуального экран. XLI международная научно-практическая конференция мцнс "наука и просвещение" 39-41. https://naukaip.ru/wp-content/uploads/2020/03/MK-754.pdf#page=39