ISSN 2181-3187

RATSIONAL TENGLAMALAR VA ULARNI YECHISH USULLARI

Teshaboyeva Muslima
Andijon davlat universiteti Matematika va mexanika fakulteti
Matematika yo'nalishi 4M2-guruh talabasi

Annotatsiya: Ratsional tenglamalar mavzusi algebra va matematik analizning muhim bo'limlaridan biridir. Ratsional tenglama — bu ratsional ifodalardan tuzilgan tenglamadir. Bunday tenglamalar ko'pincha algebraik ifodalar yordamida beriladi va ularni yechish ko'plab amaliy masalalarda qo'llaniladi. Ratsional tenglamalar, ayniqsa, murakkab algebraik ifodalar va kasrlarning xossalari bilan bog'liq bo'lgan yechimlarni izlashda katta ahamiyatga ega. Mazkur maqolada ratsional tenglamalar turkumiga kiruvchi masalalar va ularni yechish usullari ko'rib chiqiladi.

Kalit so'zlar: tenglama, ratsional tenglama, tenglama yechish, yechim,ildiz,

Ratsional tenglamalarga o'tishdan oldin tenglama haqida qisqa ta'rif va tushunchalarni berib o'tsak.

Ta'rif: f(x) = g(x) ko'rinishidagi tenglik *bir noma'lumli tenglama* deyiladi, (bu yerda $f(x)$ va $g(x)$ lar x noma'lumli funksiyalar).

Agar tenglamada x ning o'rniga shunday $x = a$ qiymat qo'yilganda $f(a) = g(a)$ to'g'ri tenglik hosil bo'lsa, $x = a$ qiymat $f(x) = g(x)$ *tenglamaning ildizi* deyiladi.

Tenglamani yechish deganda uning barcha ildizlarini topish yoki uning ildizi mavjud emasligini isbotlash tushuniladi. Agar tenglamaning ildizlari $a_1, a_2, .., a_n$, sonlar bo'lsa, ular $\{a_1, a_2, .., a_n\}$ to'plam ko'rinishida, yoki

$x_1 = a_1, x_2 = a_2, .., x_n = a_n$ kabi yoziladi.

Tenglamaning barcha ildizlari to'plami *tenglamaning yechimi* deyiladi. Tenglamaning ildizi mavjud bo'lmagan holda *"Tenglamaning ildizi yo'q"* yoki *"Tenglamaning yechimi - bo'sh to'plam*" iborasi ishlatiladi, bu holat $x \in \emptyset$ kabi ham yozish mumkin.

1-misol. $(x + 3)(2x - 1)(x - 2) = 0$ tenglamani yeching

Bu tenglamaning o'ng tarafi nolga teng, chap tarafi esa 3 ta ifodaning ko'paytmasidan iborat. Ko'paytuvchilaridan hech bo'lmaganda bittasi nolga teng bo'lgandagina ko'paytma nolga teng bo'lganligi uchun, har bir ko'paytuvchi ifodani nolga tenglashtirib olamiz: $x + 3 = 0, 2x - 1 = 0, x - 2 = 0$. Hosil bo'lgan ushbu tenglamalardan tenglamaning ildizlari

$$x_1 = -3, \qquad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 2$$

ekanligi kelib chiqadi.

2-misol. Ildizlari 0, -1 va √2 ga teng bo'lgan tenglama tuzing.

Turli ko'rinishdagi tenglamalar javob tariqasida berilishi mumkin. Eng sodda tenglama $x(x+1)(x-2)=0$ ko'rinishida bo'lishini eslatib o'tamiz.

Bu sonlar yana quyidagi tenglamaning ham ildizi bo'la oladi:

$$(x^2+x^3)(x-\sqrt{2})(x^2+3) = 0$$

Ta'rif: Agar $f(x)=g(x)$ tenglamaning barcha ildizlari $f_1(x)=g_1(x)$ tenglamaning ildizlari bo'lsa, va aksincha, $f_1(x)=g_1(x)$tenglamaning barcha ildizlari $f(x)=g(x)$ tenglamaning ildizlari bo'lsa, ya'ni ularning yechimlari ustma-ust tushsa, bunday tenglamalar *teng kuchli tenglamalar* deyiladi.

3-misol. $3x-6$ va $2x-1=3$ tenglamalarni teng kuchliligini tekshiring.

$3x-6=0$ va $2x-1=3$ tenglamalar teng kuchli, chunki har birining ildizi $x = 2$ ga teng.

Yechimi bo'sh to'plam bo'lgan har qanday ikkita tenglama ham teng kuchli bo'ladi.

Teng kuchli tenglamalar quyidagicha belgilanadi: $3x-6=0 \Leftrightarrow 2x-1=3$

Tenglama quyidagi holatlarda o'ziga teng kuchli bo'lgan teglamaga o'tadi:

a) Tenglamaning biror-bir hadi tenglikning bir qismidan ikkinchi qismiga qarama-qarshi ishora bilan o'tkazilganda.

Masalan, $f(x)=g(x)+t(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=t(x)$

b)Tenglamaning ikkala tarafini noldan farqli songa ko'paytirilganda yoki bo‘lganda.

Butun ratsional tenglamalar

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar butun ratsional ifodalar bilan berilgan bo'lsa, $f(x)=g(x)$ tenglama, *butun ratsional tenglama* deyiladi.

Bunday tenglamaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plami bo'ladi.

Ta'rif. Quyidagi ko'rinishdagi tenglama

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0, a_0\neq 0.$$

standart ko'rinishdagi n-darajali butun ratsional tenglama deb ataladi.

Agar $a_0=1$ bo'lsa, $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ tenglama keltirilgan n-darajali butun ratsional tenglama deb ataladi. $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ −koeffitsiyentlar, a_n −ozod had deb ataladi.

Ma'lumki, *n*- darajali ko‘phad tadan ko'p bo'lmagan ildizlarga ega bo'lishi mumkin, demak, har bir standart ko'rinishidagi *n*- darajali butun ratsional tenglama ham n tadan ko'p bo'lmagan ildizlarga ega bo'ladi.

Teorema: Butun koeffitsiyentli keltirilgan butun ratsional tenglamaning ildizlari butun son bo'lsa, ular ozod hadining bo'luvchilari bo'ladi.

ISSN 2181-3187

Ko'phadni ko‘phadga burchakli bo'lish usuli yordamida yechish

4-misol: $x^4 + 2x^3 = 11x^2 - 4x - 4$ tenglamani yeching.

Yechish: Avval uni standart ko'rinishga keltiramiz:

$$x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$$

Bu tenglamaning butun ildizlari borligini tekshirish uchun ozod hadi 4 ning barcha bo'luvchi- larini yozib olamiz:$\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Bu sonlarni ketma-ket tenglamaga qo'yib ko'rib, $x_1 = 1$ va $x_2 = 2$ sonlar tenglamaning ildizlari bo'lishini aniqlab olamiz. Demak, $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4$ ko'phad

$(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ ko'phadga qoldiqsiz bo'linadi.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-11x^2+4x+4 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
-\;x^4-3x^3+2x^2 & x^2+5x+2 \\ \cline{1-1}
5x^3-13x^2+4x+4 & \\
-\;5x^3-15x^2+10x & \\ \cline{1-1}
2x^2-6x+4 & \\
-\;2x^2-6x+4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Demak, tenglamani quyidagi ko'paytuvchilarga ajratish mumkin:

$(x-1)(x-2)(x^2+5x+2) = 0$. Demak, hosil bo'lgan tenglama birinchi tenglamaga teng kuchli tenglamadir. Har bir ko'paytuvchini nolga tenglashtirib, tenglamaning ildizlarini topamiz.

Javob: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{3,4} = \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

Kasr-ratsional tenglamalar

$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ko’riinishga keltirish mumkin bo’lgan tenglamalarga kasr-ratsional tenglamalar deyiladi.

$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ko’rinishdagi kasr-ratsional tenglamaning aniqlanish sohasi $g(x) \neq 0$.

Ratsional tenglamalarni yechish qadamlari:

• Tenglamadagi barcha ifodalarni tenglikning chap tarafiga o‘tkaziladi; Barcha ifodalar umumiy maxrajga keltiriladi;

• Tenglama $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ko'rinishiga keltiriladi;

• Suratining nollari topiladi;

•Aniqlanish sohasi topiladi;

ISSN 2181-3187

•Aniqlanish sohasini qanoatlantiruvchi suratining nollari tenglamaning ildizlari bo'ladi.

• Yoki $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ratsional tenglamaning yechimini topish uchun uni quyidagi $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ teng kuchli sistema ko'rinishida yozib olinadi va yechiladi.

Ba'zi hollarda bir tenglamadan unga teng kuchli tenglamaga o'tishda *chet ildizlar* paydo bo'li shi mumkin, masalan, quyidagi tenglamani qaraylik,

$$\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 0$$

Kasrning suratini nolga tenglashtiramiz:

$x^2 + x - 2 = 0 \to x_1 = -2, x_2 = 1$

Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $x \neq 1$, ya'ni $x = 1$qiymat berilgan tenglamaning yechimi bo'la olmaydi, demak, $x = 1 -$ *chet ildiz* bo'ladi.

5-misol. Tenglamaning ildizini toping:

$$\frac{2x + 3}{x - 1} = 0$$

Yechish:

$$\begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1{,}5 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Javob: $x = -1{,}5$.

6-misol. Tenglamaning ildizni toping:

$$\frac{-2x - 4}{x^2 - 4} = \frac{x + 5}{x - 2}$$

Yechish. Barcha ifodalarni tenglikdan chap tarafga o'tkazamiz va umumiy maxrajga keltiramiz.

$$\frac{2x + 4}{x^2 - 4} + \frac{x + 5}{x - 2} = 0 \Rightarrow \frac{(x + 5)(x + 2) + 2x + 4}{x^2 - 4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 7x + 10 + 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 9x + 14}{x^2 - 4} = 0$$

Kasr-ratsional ifodaning suratini nolga tenglashtiramiz va nollarini topamiz. Viyet teoremasidan foydalanamiz:

$$x^2 + 9x + 14 = 0 \Rightarrow x = -2; x = -7.$$

Kasr-ratsional ifodaning maxrajini nolga tenglashtiramiz va nollarini topamiz. Ko'paytuvchilarga ajratish usulidan foydalansak bo'ladi:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2; x = 2.$$

Ko'rinib turibdiki, $x = -2$ ham suratning, ham maxrajning noli. Maxraj hech qachon nol bo'la olmaydi. Shuning uchun $x = -2$ tenglamaning ildizi emas.

Demak, tenglamaning ildizi bitta $x = -7$.

ISSN 2181-3187

Javob: $x = -7$.

Xulosa

Ratsional tenglamalar ikki yoki undan ortiq algebraik ifodalarni o'z ichiga olgan tenglamalardir. Ularni yechish uchun, ko'pincha umumiy qoidalar, masalan, tenglamani yaxlitlash, ko'paytirish va tenglama qismlarini oddiylashtirish metodlari qo'llaniladi. Ratsional tenglamalarni to'g'ri yechish uchun, ular ustida tahlil qilish va yechimlar uchun ehtiyotkorlik bilan tekshiruvlar o'tkazish zarur. Bu turdagi tenglamalar matematikaning ko'plab sohalarida, xususan, analitik geometriya va algebra sohalarida keng qo'llaniladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Nishonov T.S. Professional approach to teaching of elements of probability theory for students of economics. Наука и образование сегодня № 12 (59), 2020. 85-87 pp.

2. Ахлимирзаев А., Нишонов Т.С. Роль и значение практическо-профессионального подхода обучения теории вероятностей и математической статистики в подготовке будущих экономистов // Universum: психология и образование : электрон. научн. журн. 2021. 2(80). 12-17 с.

3. Sh.O. Alimov va boshqalar.. “Algebra” 9-sinf uchun darslik.-T.: “O’qituvchi” nashriyot matbaa ijodiy uyi, 2009-yil.

4.Adilbek Zaitov va boshqalar.. 10-sinf Algebra va analiz asoslari [Matn]: darslik / − Toshkent: Respublika ta’lim markazi, 2022-yil. − 192 b.

5. Jo‘rayev T., Sadullayev A., Hudoyberganov G., Mansurov A., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. 1-qism. O‘zbekiston, Toshkent, 1995.