

О СУЩЕСТВОВАНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВНЕ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОДНО ОБОБЩЕННОГО МОДЕЛЯ ФИРИДРИХСА

Ш.М. Латипов, Д.А. Латипова, С.А. Очилова

E-mail sherdorlatipov@mail.ru

Аннотация: В настоящей работе рассматривается случай, в котором значения функции $\varepsilon(\cdot)$ лежат ниже существенного спектра оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, т.е. $\varepsilon(k) < \varepsilon_{\min}(k)$, $k \in \mathbb{T}^2$. Исследуется число собственных значений рассматриваемого оператора, лежащих вне существенном спектре.

Ключевые слова: Оператор, гильбертова пространства, собственное значение, оператор рождения, существенного спектра, двухмерном тор, функция

Пусть $H = H_0 + H_1$ двухканальное гильбертово пространство, состоящее из одномерного гильбертова пространства $H_0 = \mathbb{C}^1$ и "ядерного" гильбертова пространства $H_1 = L^{2,e}(\mathbb{T}^2)$ чётных квадратично-интегрируемых функций на двухмерном торе $\mathbb{T}^2$.

Пусть $E(k)$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{T}^2$ - скалярный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H_0 по формуле

$$E(k)f_0 = \varepsilon(k)f_0, \quad f_0 \in H_0$$

$$\text{где } \varepsilon(k) = -4 \sum_{i=1}^2 (1 + \cos \frac{k_i}{2})$$

Оператор $H_{\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^2$, действует в гильбертовом пространстве H_1 по формуле

$$H_{\mu}(k) = \varepsilon_k(q)f_1(q) + \mu \int_{\mathbb{T}^2} f_1(s) d\eta,$$

$$\text{где } \varepsilon_k(q) = 2 \sum_{i=1}^2 (1 - \cos \frac{k_i}{2} \cos q_i), d\eta = d\eta(q) \text{ мера Хаара, т.е.}$$

$$d\eta = \frac{dq}{(2\pi)^2}.$$

Оператор $H_{\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^2$, $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$ действует в гильбертовом пространстве H по формуле

$$H_{\gamma\mu}(k) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(k)f_0 + C_{\gamma}^* f_1 \\ C_{\gamma} f_0 + (H_{\mu}(k)f_1)(q) \end{pmatrix},$$

где $C_{\gamma}^* f_1 = \gamma(f_1, 1)_{H_1}$ (соотв. $C_{\gamma} f_0 = \gamma(f_0, 1)_{H_0}$) оператор рождения (соотв. уничтожения).

Для существенного спектра оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^2$ верно равенство

$$\sigma_{ess}(H_{\gamma\mu}(k)) = [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)],$$

где

$$\varepsilon_{min}(k) = \min_{q \in \mathbb{T}^d} \varepsilon_k(q) = 2 \sum_{i=1}^2 (1 - \cos \frac{k^{(i)}}{2}),$$

$$\varepsilon_{max}(k) = \max_{q \in \mathbb{T}^d} \varepsilon_k(q) = 2 \sum_{i=1}^2 (1 + \cos \frac{k_i}{2}),$$

В работах [1,2], в которых рассмотрены аналогичные модели, установлено, что областью значений функции $\varepsilon(\cdot)$ является отрезок $[\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$, т.е. содержится в существенном спектре. Исследовано, число собственных значений лежащих ниже существенного спектра рассматриваемого оператора, в зависимости от параметров.

Отметим, что местонахождение собственных значений оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, лежащих вне существенного спектра, зависит от параметров γ, μ, k .

Теорема. а) Пусть $\gamma \neq 0, \mu \geq 0$ и $k \in \mathbb{T}^2$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет два собственных значения $E_{\gamma\mu}^{(1)}(k)$ и $E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$ вне существенного спектра. При этом эти собственные значения удовлетворяют следующим условиям:

$$E_{\gamma\mu}^{(1)}(k) < \varepsilon(k) < \varepsilon_{min}(k) \leq \varepsilon_{max}(k) < E_{\gamma\mu}^{(2)}(k).$$

а) Пусть $\gamma = 0, \mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}^2$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет два собственных значения $E_{\gamma\mu}^{(1)}(k) = \varepsilon(k)$ и $E_{\gamma\mu}^{(2)}(k)$ вне существенного спектра. При этом эти собственные значения удовлетворяют следующим условиям:

$$E_{\gamma\mu}^{(1)}(k) = \varepsilon(k) < \varepsilon_{min}(k) \leq \varepsilon_{max}(k) < E_{\gamma\mu}^{(2)}(k).$$

б) Пусть $\gamma \neq 0, \mu \geq 0$ и $k \in \mathbb{T}^2$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ не имеет собственного значения на интервале $[\varepsilon(k), \varepsilon_{min}(k)]$.

Литература

1. С.Н. Лакаев, Ш.М. Латипов. О существование и аналитичности собственных значений двухканальной молекулярно-резонансной модели, ТМФ 169(2011) №3 стр. 1657-1666.
2. С.Н. Лакаев, Ш.М. Латипов. Числа связанных состояний двухканальной молекулярно-резонансной модели, УзМЖ 2011, № 3 стр. 98-113.
3. Рид М, Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.IV: Анализ операторов. М. Мир, 1982.