KO‘P O‘LCHAMLI TORDA ANIQLANGAN FUNKSIYALAR VA ULARNING XOSSALARI

Norqulova Gulibodom Oybek qizi
Buxoro davlat universiteti

Annotasiya. Maqolada chiziqli fazo, chiziqli fazoning qism fazosi, chiziqli fazoning faktor fazosi, chiziqli normalangan fazolar haqida umumiy ma'lumotlar hamda ularga doir misollar bayon qilingan. Bundan tashqari, chiziqli fazo va ko‘p o‘lchamli torda aniqlangan funksiyalar hamda ularning xossalari haqida ma'lumotlar keltirilgan.

Kalit so‘zlar: chiziqli fazo, kompleks sonlar, kompleks chiziqli fazo, chiziqli erkli sistema, qism fazo, refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik, ko‘p o‘lchamli tor.

FUNCTIONS DEFINED IN MULTIDIMENSIONAL SPACES AND THEIR PROPERTIES

Norqulova Gulibodom Oybek qizi
Bukhara State University

Annotation. The article provides general information about linear spaces, subspaces of linear spaces, factor spaces of linear spaces, and normalized linear spaces, along with relevant examples. Additionally, it includes information about functions defined in linear spaces and multidimensional spaces, as well as their properties.

Keywords: linear space, complex numbers, complex linear space, linear freedom system, subspace, reflexivity, symmetry, transitivity, multidimensional space.

Chiziqli fazo (vektor fazo) tushunchasi matematikaning asosiy tayanch tushunchalardan biri hisoblanadi. Quyida C orqali kompleks sonlar, R orqali haqiqiy sonlar to‘plamini belgilaymiz [1].

1-ta'rif. Agar elementlari x,y,z bo‘lgan L to‘plamda quyidagi ikki amal aniqlangan bo‘lsa:

I. Ixtiyoriy ikkita $x,y \in L$ elementlarga ularning yig‘indisi deb ataluvchi aniq bir $x+y \in L$ element mos qo‘yilgan bo‘lib, ixtiyoriy $x,y,z \in L$ elementlar uchun

1) $x+y=y+x$ (kommutativlik),
2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (assotsiativlik),
3) L da shunday θ element mavjud bo‘lib, $x+\theta=x$ (nolning mavjudligi),

4) shunday $-x \in L$ element mavjud bo‘lib, $x+(-x)=\theta$ (qarama-qarshi elementning mavjudligi) aksiomalar bajarilsa;

II. ixtiyoriy $x \in L$ element va ixtiyoriy α son ($\alpha \in R$ yoki $\alpha \in C$) uchun x elementning α songa ko‘paytmasi deb ataluvchi aniq bir $\alpha x \in L$ element mos qo‘yilgan bo‘lib, ixtiyoriy $x, y \in L$ va ixtiyoriy α, β sonlar uchun

5) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$,

6) $1 \cdot x = x$,

7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

aksiomalar bajarilsa, u holda L to‘plam chiziqli fazo yoki vektor fazo deb ataladi.

Ta’rifda kiritilgan I va II amallar mos ravishda yig‘indi va songa ko‘paytirish amallari deb ataladi.

Ta’rifda foydalanilgan sonlar zahirasiga (haqiqiy sonlar R yoki kompleks sonlar C) bog‘liq holda chiziqli fazo haqiqiy yoki kompleks chiziqli fazo deb ataladi.

1-misol. $L=R$ haqiqiy sonlar to‘plami odatdagi qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan haqiqiy chiziqli fazo tashkil qiladi. $L=C$ kompleks sonlar to‘plami ham kompleks sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan kompleks chiziqli fazo tashkil qiladi.

2-misol. $L=R^n \equiv \{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\, x_i \in R,\, i=1,2,\ldots,n\}-n$ ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlari to‘plami. Bu yerda elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi:

Ixtiyoriy $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$ lar uchun

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) \tag{1}$$

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n). \tag{2}$$

R^n - to‘plam (1) va (2) tengliklar bilan aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan haqiqiy chiziqli fazo tashkil qiladi va u n - o‘lchamli haqiqiy chiziqli fazo deb ataladi.

3-misol. $L=C^n \equiv \{z=(z_1,z_2,\ldots,z_n),\, z_k \in C,\, k=1,2,\ldots,n\}$. Bu yerda ham elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari (1) va (2) tengliklar ko‘rinishida aniqlanadi. C^n - to‘plam kompleks chiziqli fazo bo‘ladi va u n-o‘lchamli kompleks chiziqli fazo deb ataladi.

4-misol. $L=C[a,b]-[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to‘plami. Funksiyalarni qo‘shish va funksiyani songa ko‘paytirish amallari mos ravishda

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \tag{13}$$

va

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x) \tag{4}$$

ko‘rinishda aniqlanadi. (3) va (4) tengliklar bilan aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $C[a,b]$ to‘plam chiziqli fazo tashkil qiladi.

5-misol. $l_2 \equiv \{x=(x_1,x_2,...,x_n,...): \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\}$ - kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar to‘plami. Bu yerda elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi:

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n,...) \tag{5}$$

$$\alpha x=\alpha(x_1,\ x_2,...,\ x_n,...)=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n,...),\ \alpha\in C. \tag{6}$$

Yig‘indi $x+y\in l_2$ ekanligi $|a+b|^2\le 2|a|^2+2|b|^2$ tengsizlikdan kelib chiqadi. (5) va (6) tengliklar bilan aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, l_2 - to‘plam kompleks chiziqli fazo bo‘ladi.

6-misol. $c_0 \equiv \{x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots):\ \lim_{n\to\infty} x_n=0\}$- nolga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to‘plami. Bu to‘plamda ham qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari (5) va (6) tengliklar ko‘rinishida aniqlanadi va ular chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, c_0 - to‘plam chiziqli fazo bo‘ladi.

7-misol. $c\equiv\{x=(x_1,x_2,...,x_n,...): \lim_{n\to\infty} x_n=a\}$ - yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to‘plami. Bu to‘plam ham 5-misolda kiritilgan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

8-misol. $L=m$ - barcha chegaralangan ketma-ketliklar to‘plami. Bu to‘plam ham 5-misolda kiritilgan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

2-ta’rif. Bizga L va L^* chiziqli fazolar berilgan bo‘lsin. Agar bu fazolar o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lib,

$$x\leftrightarrow x^* \qquad \text{va} \qquad y\leftrightarrow y^*, \qquad (x,y\in L,\ x^*,y^*\in L^*)$$

ekanligidan

$$x+y\leftrightarrow x^*+y^* \qquad \text{va} \qquad \alpha x\leftrightarrow \alpha y^*, \qquad (\alpha-\text{ixtiyoriy son})$$

ekanligi kelib chiqsa, u holda L va L^* chiziqli fazolar o‘zaro izomorf fazolar deyiladi [2].

Izomorf fazolarni aynan bitta fazoning har xil ko‘rinishi deb qarash mumkin.

3-ta’rif. Agar L chiziqli fazoning $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ elementlar sistemasi uchun hech bo‘lmaganda birortasi noldan farqli bo‘lgan $a_1,\ a_2,\ldots,a_n$ sonlar mavjud bo‘lib,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0 \qquad (5)$$

tenglik bajarilsa, u holda $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog‘langan deyiladi. Aks holda, ya'ni (5) tenglikdan $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ ekanligi kelib chiqsa, $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog‘lanmagan yoki chiziqli erkli deyiladi [3].

Agar $x_1,\ x_2,\ldots,x_n,\ldots$ cheksiz elementlar sistemasining ixtiyoriy chekli qism sistemasi chiziqli erkli bo‘lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema chiziqli erkli deyiladi.

4-ta’rif. Agar L chiziqli fazoda n elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo‘lib, bu fazoning ixtiyoriy $n+1$ ta elementdan iborat sistemasi chiziqli bog‘langan bo‘lsa, u holda L ga n - o‘lchamli chiziqli fazo deyiladi va $\dim L = n$ deb yoziladi. n-o‘lchamli L chiziqli fazoning ixtiyoriy n ta elementdan iborat chiziqli erkli sistemasi shu fazoning bazisi deyiladi [1-3].

5-ta’rif. Agar L chiziqli fazoda ixtiyoriy $n \in N$ uchun n elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo‘lsa, u holda L cheksiz o‘lchamli chiziqli fazo deyiladi va $\dim L = \infty$ ko‘rinishda yoziladi.

Chiziqli fazoning qism fazosi. Bizga L chiziqli fazoning bo‘sh bo‘lmagan L' qism to‘plami berilgan bo‘lsin.

6-ta’rif. Agar L' ning o‘zi L da kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazoni tashkil qilsa, u holda L' to‘plam L ning qism fazosi deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda, agar ixtiyoriy $x, y \in L'$ va $a, b \in C(R)$ sonlar uchun $ax + by \in L'$ bo‘lsa, L' qism fazo deyiladi.

Har qanday L chiziqli fazoning faqat nol elementdan iborat $\{\theta\}$ qism fazosi bor. Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy L chiziqli fazoni o‘zining qism fazosi sifatida qarash mumkin.

7-ta’rif. L chiziqli fazodan farqli va hech bo‘lmaganda bitta nolmas elementni saqlovchi qism fazo xos qism fazo deyiladi.

9-misol. O‘zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ ni qaraymiz. Ma’lumki, $[a,b]$ kesmada monoton funksiyalar to‘plami $V[a,b]$ ning qism to‘plami bo‘ladi. Ammo ikki monoton funksiyaning yig‘indisi har doim monoton funksiya bo‘lavermaydi. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin. $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = -2t$ funksiyalarning har biri $[0,2]$ kesmada monoton funksiya bo‘ladi, ammo ularning yig‘indisi $x(t)+y(t)=(t-1)^2$ funksiya [0,2] kesmada monoton emas. Demak, $[a,b]$ kesmada monoton funksiyalar to‘plami $V[a,b]$ fazoning qism fazosi bo‘la olmaydi. Demak, chiziqli fazoning har qanday qism to‘plami qism fazo tashkil qilavermas ekan [3].

Bizga L fazoning bo‘sh bo‘lmagan $\{x_i\}$ qism to‘plami berilgan bo‘lsin. U holda L chiziqli fazoda $\{x_i\}$ sistemani o‘zida saqlovchi minimal qism fazo mavjud.

Haqiqatan ham, $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi hech bo‘lmaganda bitta qism fazo mavjud, bu L ning o‘zi.

Ixtiyoriy sondagi qism fazolarning kesishmasi yana qism fazo bo‘ladi. Haqiqatan ham, agar $L^* = \bigcap_i L_i$ bo‘lib $x, y \in L^*$ bo‘lsa, u holda ta’rifga ko‘ra ixtiyoriy i uchun $x, y \in L_i$ bo‘ladi. L_i qism fazo bo‘lganligi uchun $\alpha x + \beta y \in L_i$ munosabat barcha α, β sonlar uchun o‘rinli. Demak, $\alpha x + \beta y \in L^*$ bo‘ladi.

Endi $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi L ning barcha qism fazolarini olamiz va ularning kesishmasini qaraymiz hamda uni $L(\{x_i\})$ orqali belgilaymiz. $L(\{x_i\})$ qism fazo $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi minimal qism fazo bo‘ladi. Bu $L(\{x_i\})$ minimal qism fazo $\{x_i\}$ "sistemadan hosil bo‘lgan" qism fazo yoki $\{x_i\}$ sistemaning chiziqli qobig‘i deyiladi.

Chiziqli fazoning faktor fazosi. Bizga L chiziqli fazo va uning L' xos qism fazosi berilgan bo‘lsin. L ning elementlari orasida quyidagicha munosabat o‘rnatish mumkin.

8- ta’rif. Agar $x, y \in L$ elementlar uchun $x-y$ ayirma L' ga tegishli bo‘lsa, x va y ekvivalent elementlar deb ataladi.

Fazo elementlari orasida o‘rnatilgan bu munosabat refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega. Haqiqatan ham, $x-x \in L'$ (refleksivlik); $x-y \in L'$ dan $y-x=-(x-y) \in L'$ (simmetriklik); $x-y \in L'$, $y-x \in L'$ dan $x-z=(x-y)+(y-z) \in L'$ (tranzitivlik). Shuning uchun bu munosabat L ni o‘zaro kesishmaydigan sinflarga ajratadi va har bir sinf o‘zaro ekvivalent elementlardan tashkil topgan. Bu sinflar qo‘shni sinflar deb ataladi. Barcha qo‘shni sinflar to‘plami L chiziqli fazoning L' qism fazo bo‘yicha faktor fazosi deb ataladi va L/L' ko‘rinishda belgilanadi.

Tabiiyki, har qanday faktor fazoda yig‘indi va songa ko‘paytirish amallari kiritiladi.

Aytaylik, ξ va η lar L/L' dan olingan ixtiyoriy qo‘shni sinflar bo‘lsin. Bu sinflarning har biridan bittadan vakil tanlaymiz, masalan $x \in \xi,\ y \in \eta$. ξ va η sinflarning yig‘indisi sifatida $x + y$ elementni saqlovchi ζ sinf qabul qilinadi. ξ qo‘shni sinfning α songa ko‘paytmasi sifatida $\alpha\, x$ elementni saqlovchi sinf qabul qilinadi. Natija $x \in \xi,\ y \in \eta$ vakillarning tanlanishiga bog‘liq emas, chunki, qandaydir boshqa $x' \in \xi,\ y' \in \eta$ vakillarni olsak ham

$$(x+y)-(x'+y') = (x-x')+(y-y') \in L'$$

bo‘lgani uchun $x'+y' \in \xi$ bo‘ladi. Bevosita tekshirish shuni ko‘rsatadiki, L/L' da aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallar chiziqli fazo ta'rifidagi aksiomalarni qanoatlantiradi (buni mustaqil tekshirib ko‘rishni o‘quvchiga tavsiya qilamiz). Boshqacha aytganda, L/L' faktor fazo chiziqli fazo tashkil qiladi.

Shunday qilib, har bir L/L' faktor fazo unda yuqorida ko‘rsatilgan usulda kiritilgan yig‘indi va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Shuni ta'kidlash joizki, har qanday faktor fazoda L' qism fazo L/L' faktor fazoning nol elementi bo‘ladi. Ma'lumki, L' qism fazoning elementlari o‘zaro ekvivalent va L' qism fazo L chiziqli fazoning nol elementini saqlaydi. Shuning uchun ξ va L' qo‘shni sinf lar ning yig‘indisi $x+\theta = x$ ($x \in \xi,\ \theta \in L'$) elementni saqlovchi qo‘shni sinfga, ya'ni ξ ga teng [2].

9-ta’rif. L/L' faktor fazoning o‘lchami L' qism fazoning koo‘lchami deyiladi.

Agar L' qism fazo chekli n koo‘lchamga ega bo‘lsa, u holda L da shunday $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlarni tanlash mumkinki, ixtiyoriy $x \in L$ element $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + y$ ko‘rinishda bir qiymatli ifodalanadi, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - sonlar, $y \in L'$. Haqiqatan ham, L/L' faktor fazo n - o‘lchamli bo‘lsin. Bu faktor fazoda $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ bazisni tanlaymiz va har bir ξ_k sinfdan bittadan x_k vakil olamiz. Endi $x \in L$ ixtiyoriy element bo‘lsin va ξ esa x ni saqlovchi L/L' dagi qo‘shni sinf bo‘lsin. U holda

$$\xi = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n .$$

Ta'rifga ko‘ra ξ sinfdagi har bir element, xususiy holda, x element $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlarning $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ chiziqli kombinatsiyasidan L' dan olingan elementgagina farq qiladi, ya'ni

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + y, \quad y \in L'. \tag{6}$$

Bu tasvirning yagonaligini ko‘rsatamiz. Aytaylik,

$$x = \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \ldots + \alpha_n' x_n + y', \ \ y' \in L'$$

tasvir ham o‘rinli bo‘lsin. U holda

$$0=(\alpha_1-\alpha_1^{'})x_1+(\alpha_2-\alpha_2^{'})x_2+...+(\alpha_n-\alpha_n^{'})x_n+y-y'$$

tenglikka kelamiz. Bundan

$$\alpha_1=\alpha_1^{'},\ \alpha_2=\alpha_2^{'},...,\alpha_n=\alpha_n^{'},\ \ y=y'.$$

Chiziqli normalangan fazolar. Chiziqli fazolarda elementlarning bir-biriga yaqinligi degan tushuncha yo‘q. Ko‘plab amaliy masalalarni hal qilishda elementlarni qo‘shish va ularni songa ko‘paytirish amallaridan tashqari, elementlar orasidagi masofa, ularning yaqinligi tushunchasini kiritishga to‘g‘ri keladi. Bu bizni normalangan chiziqli fazo tushunchasiga olib keladi. Normalangan fazolar nazariyasi S.Banax va boshqa matematiklar tomonidan rivojlantirilgan [3].

10-ta’rif. Bizga L - chiziqli fazo va unda aniqlangan haqiqiy qiymatli p funksional berilgan bo‘lsin. Agar p quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi:

1) $p(x)\geq 0,\ \ \forall x\in L;\ \ \ p(x)=0\Leftrightarrow x=\theta;$

2) $p(ax)=|a|p(x),\ \ \forall a\in C,\ \forall x\in L;$

3) $p(x+y)\leq p(x)+p(y),\ \forall x,y\in L.$

11-ta'rif. Norma kiritilgan L chiziqli fazoga chiziqli normalangan fazo deyiladi va $x\in L$ elementning normasi $\|x\|$ orqali belgilanadi.

Agar L - normalangan fazoda $x,y\in L$ elementlar jufti uchun

$$\rho(x,y)=\|x-y\|$$

sonni mos qo‘ysak, ρ funksional metrikaning 1-3 aksiomalarini qanoatlantiradi. Metrika aksiomalarining bajarilishi normaning 1-3 shartlaridan bevosita kelib chiqadi. Demak, har qanday chiziqli normalangan fazoni metrik fazo sifatida qarash mumkin. Shu sababli, metrik fazolarda o‘rinli bo‘lgan barcha tasdiqlar (ma'lumotlar) chiziqli normalangan fazolarda ham o‘rinli.

10-misol. $L=C[a,b]$ – $[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda $f\in C[a,b]$ elementning normasi

$$\|f\|=\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$$

tenglik bilan aniqlanadi. Agar $C[a,b]$ chiziqli fazoda norma

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt$$

formula vositasida kiritilgan bo‘lsa, uni $C_1[a,b]$, agar norma

$$\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b|f(t)|^2dt}$$

tenglik orqali kiritilgan bo‘lsa uni $C_2[a,b]$ deb belgilaymiz.

X chiziqli normalangan fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin.

12-ta'rif. Biror $x \in X$ va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo‘lib, barcha $n > n_0$ larda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x \in X$ elementga yaqinlashadi deyiladi.

13-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo‘lib, barcha $n > n_0$ va $p \in N$ larda $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ - fundamental ketma-ketlik deyiladi.

14-ta'rif. Agar X chiziqli normalangan fazodagi ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda X to‘la normalangan fazo yoki Banax fazosi deyiladi.

Юқорида баён қилинган тушунчалар [4-25] мақолаларда кенг қўлланилган ва тегишли натижалар олинган.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. J.I.Abdullayev, R.N.G‟anixo‟jayev, H.H.Shermatov, O.I.Egamberdiyev.
1. “Funksional analiz”. Toshkent – Samarqand. 2009.
2. Т.А.Саримсоқов. “Функционал анализ курси”. Тошкент – “Ўқитувчи” – 1980.
3. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. “Элементы теории функций и функционального анализа”. Москва “Наука”, – 1989.
4. Rasulov X. R. On a Volterra dynamical system of a two-sex population, Lobachevskii Journal of Mathematics, 45(8), 3975-3985 pp., 2024.
5. Расулов Х.Р. О качественном анализе одного класса вольтеровских квадратично-стохастических операторов с непрерывным временем. Математические заметки, 2024, том 116, выпуск 5, стр. 792–808.
6. Расулов Х.Р. Об одной квадратичной динамической системе с непрерывным временем // Тезисы международной научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» Nukus, May 2-3, 2023, Стр.286-287.
7. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.
8. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical
9. systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.
10. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // arXiv e-prints, 2022, arXiv: 2211.06186.
11. Xaydar Raupovich Rasulov. Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation with mixed type. AIP Conf. Proc. 2781, 020016 (2023)

12. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
13. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
14. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), c. 7-10.
15. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
16. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
17. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
18. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
19. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
20. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
21. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
22. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
23. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
24. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).
25. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
26. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).