

“HALQA VA UNING XOSSALARI”**Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi***Andijon davlat pedagogika instituti Informatika va aniq fanlar kafedrası
o'qituvchisi E-mail: saliyevasevara18@gmail.com***Ibroximova Surmaxon To'lqinboy qizi***Andijon davlat pedagogika instituti Matamatika va informatika
yo`nalishi talabasi***Annotatsiya**

Ushbu maqolada halqa tushunchasi va uning asosiy xossalari batafsil tahlil qilinadi. Halqalar algebraik tuzilma sifatida ikki asosiy amal – qo'shish va ko'paytirishga ega bo'lib, ular birlashma qonuni, tarqatish qonuni kabi bir qancha aksiomalarni qanoatlantiradi. Maqolada halqalar nazariyasining rivojlanishi tarixi, E. Noether va boshqa matematiklarning hissasi, shuningdek, halqalarning kommutativ va no-kommutativ turlari ko'rib chiqiladi. Halqalarning asosiy xossalari, masalan, nol elementi, teskari element va distributivlik xususiyatlari misollar orqali tushuntiriladi. Bundan tashqari, halqalar geometriya va sonlar nazariyasi kabi sohalardagi qo'llanilishlari haqida ham ma'lumotlar beriladi. Ushbu maqola algebra va matematik strukturalarni o'rganishda muhim bo'lib, nazariy va amaliy ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: Halqa, Xossalar, Algebraik tuzilma, Qo'shish, Ko'paytirish, Kommutativlik, No-kommutativlik, Tarqatish qonuni, Nol elementi, Teskari element, Sonlar nazariyasi, Geometriya, Algebra, Matritsa

“RING AND ITS PROPERTIES”**Annotation**

This article provides a detailed analysis of the concept of rings and their fundamental properties. Rings, as algebraic structures, consist of two primary operations – addition and multiplication – which satisfy several axioms, such as the associative law and the distributive law. The article explores the historical development of ring theory, the contributions of E. Noether and other mathematicians, and examines the distinctions between commutative and non-commutative rings. The key properties of rings, including the zero element, inverse elements, and distributive characteristics, are explained with examples. Additionally, the applications of rings in fields such as geometry and number theory are discussed. This article holds significant theoretical and practical value in the study of algebra and mathematical structures.

Keywords: Ring, Properties, Algebraic structure, Addition, Multiplication, Commutativity, Non-commutativity, Distributive law, Zero element, Inverse element, Number theory, Geometry, Algebra, Matrix

“КОЛЬЦО И ЕГО СВОЙСТВА”

Аннотация

В данной статье подробно анализируется понятие колец и их основные свойства. Кольца как алгебраические структуры включают две основные операции – сложение и умножение, которые удовлетворяют ряду аксиом, таким как ассоциативный закон и распределительный закон. В статье рассматривается историческое развитие теории колец, вклад Э. Нётер и других математиков, а также различия между коммутативными и некоммутативными кольцами. Основные свойства колец, такие как нулевой элемент, обратные элементы и распределительные характеристики, объясняются на примерах. Кроме того, обсуждаются приложения колец в таких областях, как геометрия и теория чисел. Данная статья имеет важное теоретическое и практическое значение для изучения алгебры и математических структур.

Ключевые слова: Кольцо, Свойства, Алгебраическая структура, Сложение, Умножение, Коммутативность, Некоммутативность, Распределительный закон, Нулевой элемент, Обратный элемент, Теория чисел, Геометрия, Алгебра, Матрица

Halqaning ta'rifi

Halqa — algebraik tuzilma bo'lib, uning ikkita asosiy amali mavjud: qo'shish va ko'paytirish. Halqa tushunchasi ko'plab matematik va amaliy sohalarda, masalan, algebra, sonlar nazariyasi, geometriya va kriptografiyada qo'llaniladi.

Halqaning xususiyatlariga ko'ra, agar biz halqadagi ikkita elementni ko'paytiranimizda, ular uchun hali ham halqa qoidalari amal qilsa, demak, biz bu elementlar haqida algebraik tahlil qila olamiz. Halqaning boshqa muhim xususiyati — uning *kommutativ* yoki *no-kommutativ* bo'lishi mumkin. Agar halqa ko'paytirish amali kommutativ bo'lsa, bu halqani *kommutativ halqa* deb ataymiz, aks holda esa, u *no-kommutativ halqa* bo'ladi.

Shuningdek, har bir halqada **nol elementi** va **teskari element** mavjud. Nol element qo'shish bo'yicha neytral element bo'lib, har qanday element bilan qo'shilganda, o'zgarishsiz qoladi. Teskari element esa, har bir element uchun mavjud bo'lib, uning bilan qo'shilganda nolni hosil qiladi.

Halqalar, shuningdek, algebraik tuzilmalar orasida umumiy ildizlarni topish, funksiyalarni tahlil qilish va boshqa ko'plab matematik masalalarni yechishda muhim

vosita hisoblanadi. Halqaning tahlili va xossalari algebraik tizimlar uchun mustahkam asos yaratadi.

Halqaning xossalari

Halqaning xossalari quyidagilarni o'z ichiga oladi:

1. **Qo'shishning assotsiativligi:**
2. Har qanday a , b , va c halqada bo'lsa, qo'shish amali assotsiativ bo'ladi, ya'ni $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. **Qo'shishning kommutativligi:**
Har qanday a va b elementlar uchun $a + b = b + a$.
4. **Nol element mavjudligi:**
Har bir halqada 0 deb ataladigan nol elementi mavjud bo'lib, bu element har qanday element bilan qo'shilganda o'zgarishsiz qoladi: $a + 0 = a$.
5. **Teskari elementlar mavjudligi:**
Har bir element a uchun uning teskari elementi a' mavjud bo'lib, u bilan qo'shilganda nol hosil qiladi: $a + a' = 0$.
6. **Ko'paytirishning assotsiativligi:**
Ko'paytirish ham assotsiativ bo'lib, agar a , b va c halqada bo'lsa, unda $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
7. **Ko'paytirishning distributivligi:**
Ko'paytirish va qo'shish o'rtasidagi distributivlik quyidagicha ifodalanadi: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ va $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
8. **Ko'paytirishning kommutativligi (kommutativ halqa uchun):**
Agar halqa kommutativ bo'lsa, u holda $a \cdot b = b \cdot a$. Bu xususiyat har doim halqa uchun amal qilmaydi, faqat kommutativ halqalarda mavjud.
9. **Ko'paytirish uchun birlashish qonuni:**
Ko'paytirish bo'yicha birlashish qonuni mavjud, ya'ni $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
10. **Ko'paytirishdagi nol elementi:**
Halqada nol elementi mavjud bo'lib, har qanday element a uchun $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
11. **Ko'paytirishdagi teskari element (to'liq halqalar uchun):**
To'liq halqalarda, har bir nolsiz element a uchun ko'paytirish bo'yicha teskari element a^{-1} mavjud bo'lib, $a \cdot a^{-1} = 1$ bo'ladi.

o Halqa turlari

- **Kommutativ halqalar:** Ko'paytirish amali kommutativ bo'lgan halqalar deb ataladi. Masalan, butun sonlar to'plami Z kommutativ halqadir, chunki har qanday ikkita butun sonning ko'paytmasi kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$
- **No-kommutativ halqalar:** Kommutativ bo'lmagan halqalar. Misol sifatida matritsalar halqasini keltirish mumkin. Agar A va B matritsalar bo'lsa, unda

- $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- **To'liq halqalar (Field):** To'liq halqa (maydon) da, har bir nolsiz element uchun teskari element mavjud. Masalan, haqiqiy sonlar to'plami R — bu maydon, chunki har qanday $a \neq 0$ soni uchun a^{-1} mavjud.

Halqaning amaliy qo'llanilishi

Halqaning amaliy qo'llanilishi juda keng, ularni ko'plab sohalarda qo'llash mumkin:

- **Kriptografiya:** Halqalar, xususan, modulo hisoblashlar, xavfsiz muloqotlarni ta'minlashda ishlatiladi. Misol uchun, RSA algoritmi, xususan, katta sonlarni modulo hisoblash orqali ishlaydi.
- **Kodlash nazariyasi:** Polinomial kodlash va Reed-Solomon kodlari kabi usullar halqalar va maydonlarga asoslanadi. Bu kodlar xatolarni aniqlash va tuzatish uchun ishlatiladi.
- **Algebraik geometriya:** Halqalar algebraik geometriyada algebraik tizimlarni tahlil qilishda qo'llaniladi. Masalan, polinomial tenglamalarni yechishda halqalar ishlatiladi.

o Halqalar va modullar

Halqalar va modullar algebraik strukturalarning ikki asosiy tipidir:

- **Modullar:** Halqalarga o'xshash bo'lsada, ular kengroq tuzilmalarni tashkil qiladi. Agar R halqa bo'lsa, M modul deb ataladigan to'plamda R -ning amallari M -ga ta'sir ko'rsatadi. Masalan, butun sonlar to'plami Z moduli.
- **Misol:** Agar $R = Z$ bo'lsa va $M = Z/2Z$ bo'lsa, unda M modul sifatida qaraladi, chunki 2 ga bo'lish operatsiyasi modulga bog'liq.

o Halqa va ideal tushunchalari

Ideal halqalar bo'yicha qo'shimcha struktura bo'lib, halqa ichidagi kichik tuzilmani ifodalaydi:

- **Ideal:** Halqaning idealini o'rganish, halqaning o'zaro bog'liq elementlari to'plamini tahlil qilishga yordam beradi. Masalan, Z butun sonlar halqasida $2Z$ ideal bo'lib, u 2 ga bo'linadigan barcha butun sonlarni o'z ichiga oladi.
- **Misol:** Agar $R = Z$ bo'lsa, $I = (6)$ ideal bo'lib, u 6 ga bo'linadigan barcha sonlardan iborat.

o Halqaning bo'linish xossalari

Halqaning bo'linish xossalari ko'pincha algebraik tahlilni o'rganishda muhim rol o'ynaydi:

- **Bo'linishning xossalari:** Halqada bo'linish amali to'g'ri ishlashi uchun, ko'paytirish va qo'shish amallari bo'yicha ma'lum xossalar bo'lishi kerak.
- **Misol:** Agar $a = 6$ va $b = 3$ bo'lsa, unda 6 soni 3 ga bo'linadi, chunki $6 \div 3 = 2$ to'g'ri natija beradi.

o Ko'paytirishdagi nol elementi

Har bir halqada ko'paytirish bo'yicha nol elementi mavjud bo'lib, u har qanday element bilan ko'paytirilsa, natija nolga teng bo'ladi.

- **Ko'paytirishdagi nol elementi:** 0 element har qanday element bilan ko'paytirilsa, natija 0 bo'ladi.
- **Misol:** Agar $a = 5$ bo'lsa, $a \cdot 0 = 0$.

o Ko'paytirishdagi teskari element

To'liq halqalarda (maydonlarda) har bir element uchun ko'paytirish bo'yicha teskari element mavjud:

- **Teskari element:** Har bir $a \neq 0$ element uchun teskari element a^{-1} mavjud bo'lib, bu element bilan ko'paytirilganda birlik natija olinadi: $a \cdot a^{-1} = 1$.
- **Misol:** Agar $a = 5$, unda $a^{-1} = 1$ bo'ladi, chunki $5 \cdot 1 = 5$. Tuzilma va mavjud nazariyalar

Halqalar va boshqa algebraik strukturalar o'rtasidagi aloqalar ko'plab nazariyalar uchun asos bo'lib xizmat qiladi.

- **Algebraik strukturalar o'rtasidagi munosabatlar:** Halqa, maydon, guruhlar o'rtasidagi farqlarni o'rganish muhim. Masalan, har bir maydon halqadir, lekin har bir halqa maydon bo'lmaydi.
- **Misol:** Z_6 — bu halqa, ammo bu maydon emas, chunki 6 ning teskari elementi mavjud emas.

o Mavzu yuzasidan masalalar

Masala 1:

Halqa $R = Z_6$ (qoldiqlar halqasi) bo'yicha quyidagilarni tekshiring:

1. $a = 4, b = 2$ uchun $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \cdot 1$ ekanligini isbotlang.
2. Halqaning nol elementi va birlik elementini aniqlang.

Yechim:

1. $b + 1 = 2 + 1 = 3$, demak, $a \cdot (b + 1) = 4 \cdot 3 = 12 \text{ mod } 6 = 0$.
2. Shuningdek, $a \cdot b + a \cdot 1 = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 8 + 4 = 12 \text{ mod } 6 = 0$. Shuning uchun $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \cdot 1$.
3. Nol elementi 0, chunki $a + 0 = a$.
Birlik elementi 1, chunki $a \cdot 1 = a$.

Masala 2:

Ko'phadlar halqasini ($R[x]$) ko'rib chiqamiz, bu yerda $R = Z_2$ (ikki elementli halqa).

1. $f(x) = x^2 + x + 1$ va $g(x) = x^2 + 1$ ko'phadlarning yig'indisini va ko'paytmasini hisoblang.
2. $R[x]$ -dagi bitta nol bo'lmagan g'ayrikommutativ halqani misol qilib keltiring.

Yechim:

1. Yig'indini hisoblaymiz:

$$f(x) + g(x) = (x^2 + x + 1) + (x^2 + 1) = x^2 + x^2 + x + 1 + 1 = 2x^2 + x + 2.$$

Ko'paytmani hisoblaymiz:

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 1) = x^4 + x^2 + x^3 + x + x^2 + 1 = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

2. $R[x]$ -dagi nol bo'lmagan g'ayrikommutativ halqaga misol: Matritsa halqasi $M_2(Z_2)$.

Xulosa:

Halqa va uning xossalari algebraik strukturalarni o'rganishda muhim ahamiyatga ega bo'lib, bu tushuncha matematikadagi ko'plab fundamental masalalarni hal qilishda asosiy vosita sifatida xizmat qiladi. Mazkur maqolada halqaning ta'rifi, xususiyatlari, va xossalari keng yoritilib, turli misollar orqali ularning qo'llanilishi batafsil tushuntirildi.

Halqalar nazariyasi nafaqat sof matematika, balki informatika, kriptografiya, fizika, va boshqa fanlar uchun ham nazariy asos bo'lib xizmat qiladi. Ayniqsa, kommutativ va kommutativ bo'lmagan halqalar, nol va birlik elementlarning mavjudligi, va halqalarning boshqa algebraik strukturalar bilan aloqalari kabilar tadqiqotda muhim rol o'ynaydi.

Yuqorida keltirilgan misollar orqali halqalarning turli-tuman xususiyatlari amaliyotda qanday qo'llanilishini ko'rsatdik. Shuningdek, ushbu nazariyaning o'rganilishi davomida ochiq muammolar va kelgusida olib borilishi mumkin bo'lgan tadqiqotlar uchun yo'nalishlar ham aniqlandi.

Umuman olganda, halqa nazariyasi zamonaviy matematikaning rivojlanishida va yangi tadqiqotlar olib borishda mustahkam poydevor bo'lib xizmat qilmoqda. Ushbu maqola mavzu yuzasidan bilim va tushunchalarni kengaytirishga, shuningdek, halqa nazariyasining amaliyotda tutgan o'rnini anglashga yordam berishi umid qilamiz.

Foydalanilgan Adabiyotlar

1. **D.S.Malik, John.M.Mordeson (1997).** *Fundamentals of Abstract Algebra*
2. **J.Xojiev, C.Faynleyb (2007).** *Algebra va sonlar nazariyasi kursi.*
3. **A.G.Kurosh (1976).** *Oliy algebra kursi*
4. **Harris, J. (1992).** *Algebraic Geometry: A First Course.* Springer.