“IKKI KO‘PHADNING REZULTANTI VA UNING TADBIQI”

Saliyeva Sevara Ma’mirbek qizi
Andijon davlat pedagogika instituti Informatika va aniq fanlar kafedrasi o‘qituvchisi E-mail: saliyevasevara18@gmail.com
Karimova Zulayho Rahmidin qizi
Andijon davlat pedagogika instituti Matamatika va informatika yo`nalishi talabasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada ikki ko‘phadning rezultanti tushunchasi va uning hisoblanish usullari ko‘rib chiqilgan. Rezultant — ikki ko‘phadning umumiy ildizlari mavjudligini aniqlashda ishlatiladigan algebraik vositadir. Maqolada Sylvester matritsasi yordamida rezultantni hisoblash, uning algebraik o‘lchovlari va Bezout identifikatori haqida batafsil ma'lumot berilgan. Misollar yordamida ko‘phadlarning umumiy ildizlari mavjud yoki yo‘qligini tekshirish jarayoni ko‘rsatilgan. Maqola algebraik tizimlarni yechishda rezultantning o‘rnini tushunishga yordam beradi.

Kalit so‘zlar: Rezultant, Sylvester matritsasi, algebraik tenglamalar, ko‘phadlar, Bezout identifikatori, ildizlar, determinant, algebraik tizimlar, umumiy ildizlar, ko‘phadlarning o‘zaro qarama-qarshiligi.

“THE RESULTANT OF TWO POLYNOMIALS AND ITS APPLICATIONS”

Abstract: This article discusses the concept of the resultant of two polynomials and its computation methods. The resultant is an algebraic tool used to determine whether two polynomials have common roots. The article provides detailed information on calculating the resultant using Sylvester's matrix, its algebraic properties, and the Bezout identity. Examples are used to demonstrate how to check whether two polynomials share common roots. The article helps understand the role of the resultant in solving algebraic systems.

Keywords: Resultant, Sylvester matrix, algebraic equations, polynomials, Bezout identity, roots, determinant, algebraic systems, common roots, polynomial intersection.

“РЕЗУЛЬТАНТ ДВУХ МНОГОЧЛЕНОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ”

Аннотация: В данной статье рассматривается понятие результатанта двух многочленов и методы его вычисления. Результант — это алгебраический инструмент, используемый для определения наличия общих корней у двух многочленов. В статье подробно объясняется вычисление результатанта с помощью матрицы Сильвестра, его алгебраические свойства и тождество Безу.

Приведены примеры, демонстрирующие, как проверить наличие общих корней у двух многочленов. Статья помогает понять роль результатанта в решении алгебраических систем.

Ключевые слова: Результант, матрица Сильвестра, алгебраические уравнения, многочлены, тождество Безу, корни, детерминант, алгебраические системы, общие корни, пересечение многочленов.

Rezultant tushunchasining ta'rifi

Rezultant– ikki yoki undan ortiq koʻphadning oʻzaro qarama-qarshiligini oʻlchovchi algebraik tushuncha boʻlib, u koʻphadlarning umumiy ildizlari mavjud yoki yoʻqligini aniqlash uchun ishlatiladi. Ya'ni, agar ikkita koʻphad bir xil ildizga ega boʻlsa, ularning rezultanti nolga teng boʻladi. Agar koʻphadlarning umumiy ildizlari yoʻq boʻlsa, ularning rezultanti nolga teng boʻlmaydi.

Masalan, ikkita koʻphad $P(x)$ va $Q(x)$ uchun rezultant $R(P, Q)$ quyidagi xususiyatga ega:

- Agar $P(x)$ va $Q(x)$ koʻphadlar bir xil ildizga ega boʻlsa, unda $R(P, Q) = 0$.
- Agar $P(x)$ va $Q(x)$koʻphadlar umumiy ildizlarga ega boʻlmasa, unda $R(P, Q) \neq 0$

Rezultant koʻphadlarning ildizlari haqidagi muhim ma'lumotlarni beradi va algebraik tizimlarni tahlil qilishda foydalidir.

Ikki koʻphadning rezultanti va uning algebraik oʻlchovlari

Ikki koʻphadning rezultanti, asosan, koʻphadlarning oʻzaro ildizlarining mavjudligini yoki mavjud emasligini aniqlash uchun ishlatiladi. Agar ikkita koʻphad $P(x)$ va $Q(x)$berilgan boʻlsa, ularning rezultanti $R(P, Q)$ quyidagi algebraik xususiyatlarga ega boʻladi:

1. **Rezultantning qiymati**: Rezultantning qiymati, ikki koʻphadning ildizlarining bir-biriga qarama-qarshi boʻlishini koʻrsatadi. Agar ikkita koʻphad bir xil ildizga ega boʻlsa, rezultant nolga teng boʻladi. Aksincha, agar koʻphadlar bir xil ildizga ega boʻlmasa, rezultant manfiy yoki musbat boʻladi.
2. **Algebraik oʻlchovlar**:
   - Koʻphadning darajasi m va n boʻlsa, unda ularning rezultanti matritsasi $m \times n$ oʻlchamga ega boʻladi.
   - Rezultantni hisoblashda matritsada koʻphadlarning har bir a'zosi, koeffitsiyentlari va ularning oʻzaro qarama-qarshiligi aks ettiriladi.
3. **Rezultant va koʻphadlar**:
   - Agar ikki koʻphadning rezultanti nolga teng boʻlsa, demak, ular umumiy ildizga ega. Bu holda koʻphadlar oʻzaro bogʻliq yoki qarama-qarshi.
   - Agar rezultant nolga teng boʻlmasa, bu holda koʻphadlar oʻzaro mustaqil, ya'ni umumiy ildizlarga ega emas.

Rezultantni hisoblash usullari: Sylvester matritsasi va determinantlar

Rezultantni hisoblashning eng mashhur usullaridan biri **Sylvester matritsasi** yordamida hisoblashdir. Sylvester matritsasi– bu ikki koʻphadning oʻzaro ildizlarining mavjudligini aniqlash uchun ishlatiladigan maxsus matritsa. Quyida bu usulni batafsil tushuntirish:

1. **Sylvester matritsasi**:
   Agar
   $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ va $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ikkita koʻphad boʻlsa, ularning **Sylvester matritsasi** quyidagi tarzda tuziladi:
   - Har bir koʻphadning darajasi n va $m$boʻlsa, unda **Sylvester matritsasi** $(n+m) \times (n+m)$oʻlchamda boʻladi.
   - Matritsada $P(x)$ va $Q(x)$ koʻphadlarining koeffitsiyentlari joylashadi.

   Sylvester matritsasini tuzish uchun, har bir koʻphadning a'zolarini toʻliq koʻpaytirilgan shaklda joylashtirish kerak boʻladi.
2. **Determinantlar**: Rezultantni hisoblashda Sylvester matritsasining determinantini olish orqali, ikkita koʻphadning rezultantini topish mumkin. Agar $R(P, Q)$ rezultantni bildirsa, unda:

$$R(P, Q) = det(S)$$

   Bu yerda S – Sylvester matritsasi. Agar determinant nolga teng boʻlsa, bu ikkita koʻphadning umumiy ildizlarga ega ekanligini bildiradi.

3. Ikki Koʻphadning Rezultanti: Hisoblash Usullari

o Ikki koʻphadning rezultanti uchun formulalar

Ikki koʻphadning rezultanti, odatda, **Sylvester matritsasi** yoki **Bezout identifikatori** yordamida hisoblanadi. Quyida bu hisoblash usullari va formulalar haqida batafsil tushuntirish keltiraman.

1. **Sylvester matritsasining formuli**: Ikkita koʻphad $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ va $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$uchun Sylvester matritsasi quyidagicha tuziladi:
   - Har bir koʻphadning koeffitsiyentlari matritsaning satrlari va ustunlari sifatida joylashtiriladi.
   - Matritsa oʻlchami $(n+m) \times (n+m)$ boʻladi, bu yerda nn va mm koʻphadlarning darajalari.

   Sylvester matritsasini tuzish uchun, har bir koʻphadning koeffitsiyentlari quyidagicha joylashtiriladi:
   - $P(x)$ koʻphadining koeffitsiyentlari birinchi nn satrlarda,
   - $Q(x)$ koʻphadining koeffitsiyentlari qolgan satrlarda joylashadi.

   Rezultant $R(P, Q)$ hisoblanadi:

$$R(P,Q) = det(S)$$

Bu yerda $S -$ Sylvester matritsasi, va uning determinantini hisoblash orqali ikki ko‘phadning rezultanti topiladi.

2. **Bezout identifikatori**: Bezout identifikatori ham ikki ko‘phadning rezultanti hisoblashda ishlatiladigan muhim formuladir. Agar $P(x)$ va $Q(x)$ ikkita ko‘phad bo‘lsa, ularning rezultanti $R(P,Q)$ quyidagicha ifodalanadi:

$$R(P,Q) = det(S)$$

Bu formula, asosan, ikkita ko‘phadning umumiy ildizlarining mavjudligini tekshirishda ishlatiladi.

o Misollar: ikkita ko‘phadning rezultanti

Misol 1: Ikki bir o‘zgaruvchili ko‘phad $P(x) = x^2 - 1$ va $Q(x) = x - 1$.

- $P(x) = x^2 - 1$ va $Q(x) = x - 1$ ko‘phadlarini yozamiz:
  $P(x) = x^2 + 0x - 1, Q(x) = x + 0P(x) = x^2 + 0x - 1,$
  Sylvester matritsasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Bu matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$det(S) = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) - 0 \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (-1) \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1$$

Demak, $P(x)$ va $Q(x)$ ko‘phadlarning rezultanti $R(P,Q) = -1$. Bu shuni anglatadiki, ularning umumiy ildizlari yo‘q.

Misol 2: Ikki ko‘phad $P(x) = x^2 - 2x + 1$ va $Q(x) = x - 1$.

- $P(x) = x^2 - 2x + 1$ va $Q(x) = x - 1$ ko‘phadlarini yozamiz:
- $P(x) = x^2 - 2x + 1$, $Q(x) = x - 1$ Sylvester matritsasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Bu matritsaning determinantini hisoblaymiz:
  $det(S) = 1 \cdot (-1) - (-2 \cdot 1) = -1 + 2 = 1$

Demak, $P(x)$ va $Q(x)$ ko‘phadlarning rezultanti $R(P,Q) = 1$. Bu shuni anglatadiki, ularning umumiy ildizlari yo‘q.

o Algebraik tenglamalarni yechishdagi rol

Ikkita ko‘phadning rezultanti, algebraik tenglamalar tizimini yechish uchun juda muhim vosita hisoblanadi. Agar bizda ikki ko‘phad $P(x)$ va $Q(x)$ bo‘lsa, ularning rezultanti $R(P,Q)$ bu ko‘phadlarning umumiy ildizlarining mavjudligini aniqlashda ishlatiladi. Agar $R(P,Q) = 0$bo‘lsa, demak, $P(x)$ va $Q(x)$ ko‘phadlari o‘rtasida umumiy ildizlar mavjud, ya'ni ularning kesishish nuqtalari mavjud.

Rezultant algebraik tenglamalar tizimini yechishda quyidagi asosiy rollarni bajaradi:

1. **Umumiy ildizlarni aniqlash**: Ikkita koʻphadning rezultanti noldan teng boʻlsa, ularning ildizlari umumiy boʻladi. Bu, ayniqsa, yuqori darajali tenglamalarni yechishda foydalidir.
2. **Tenglama tizimlarini yechish**: Agar ikki yoki undan koʻproq koʻphadlar boʻlsa, ularning rezultantlarini hisoblash orqali tenglama tizimini yechish mumkin. Bu usul koʻphadlar orasidagi algebraik bogʻlanishlarni aniqlashda samarali.
3. **Bezout identifikatori**: Bezout identifikatori yordamida ikkita koʻphadning rezultanti hisoblanadi. Bu, masalan, modular arifmetikada yoki algebraik tizimlarni tahlil qilishda muhimdir.

Xulosa:

Koʻphadlar va ularning rezultantlari algebraik va geometrik tahlilning muhim qismlarini tashkil etadi. Rezultant tushunchasi ikki koʻphadning kesishish nuqtalari, oʻzaro munosabatlari va algebraik xususiyatlarini aniqlashda asosiy rol oʻynaydi. Bunda, Sylvester matritsasi va determinantlar yordamida ikki koʻphadning rezultanti hisoblanadi. Ushbu usullar koʻphadlarning tenglamalarini tahlil qilish va geometrik shakllarini aniqlashda qoʻllaniladi.

Rezultantlarning qoʻllanilishi algebraik tenglamalar tizimlarini yechish, geometriyada koʻphadlarning kesishish nuqtalarini aniqlash kabi masalalarda keng tarqalgan. Ular real hayotdagi masalalarda ham, masalan, fizika va muhandislikda amaliy qoʻllanishlarga ega.

Foydalanilgan Adabiyotlar

1. **Bertini, L. (1982).** *Algebraic Geometry and its Applications.* Cambridge University Press.
2. **Cox, D. A., Little, J., & O'Shea, D. (2007).** *Ideals, Varieties, and Algorithms.* Springer.
3. **Sommerville, D. M. Y. (1999).** *Introduction to Geometry.* Dover Publications.
4. **Harris, J. (1992).** *Algebraic Geometry: A First Course.* Springer.