

INTEGRAL VA UNING TADBIQLARI

Ashurova Zulfizar

Andijon Davlat Universiteti Matematika-mexanika fakulteti
matematika yo'nalishi 4M1 guruh talabasi

Annotatsiya: Mazkur maqolada integral tushunchasi va uning matematik tahlil sohasidagi asosiy tadbirlari tahlil qilingan. Funktsiyalarning boshlang'ich funksiyasini topish masalasi, aniqlanmas integralning ta'rif, uning xossalari va amaliy qo'llanilishi batafsil yoritilgan. Maqola integral tushunchasining matematik asoslarini, uning amaliyotdagi ahamiyatini hamda integrallar jadvalidan foydalanishni ko'rsatib beradi. Matematik analizning ushbu mavzusi nafaqat nazariy ahamiyatga, balki turli fanlar kesimida qo'llanma sifatida ham dolzarblik kasb etadi.

Kalit so'zlar: Integral, aniqlanmas integral, boshlang'ich funktsiya, matematik analiz, integrallash xossalari, funktsiyalar differensial, integralni hisoblash

Ma'lumki, hosila va uning tadbirlari bobida berilgan $y=F(x)$ funktsiyaning $F'(x)=f(x)$ hosilasini topish bilan shug'ullangan edik. Ammo amaliyotning bir qator masalalarida teskari masala, ya'ni $y=F(x)$ funktsiyani uning ma'lum bo'lgan $F'(x)=f(x)$ hosilasi bo'yicha topish masalasiga ham duch kelinadi.

Masalan, moddiy nuqtaning harakat tenglamasi $S=S(t)$ berilgan bo'lsa, unda t_0 vaqtgacha bosib o'tilgan masofa $S_0=S(t_0)$ kabi aniqlanadi. Ammo harakat tenglamasi $S=S(t)$ noma'lum bo'lib uning hosilasi $S'(t)=v(t)$ ya'ni oniy tezlik berilgan holda $S_0=S(t_0)$ masofani topish masalasi paydo bo'ladi. Bu kabi masalalar integral tushunchasiga olib keladi. Biz bu tushunchani o'rganishga kirishamiz.

Ta'rif. Biror chekli yoki cheksiz $(a; b)$ oraliqdagi har bir x nuqtada differensiallanuvchi va hosilasi

$$F'(x)=f(x) \quad (1)$$

shartni qanoatlantiruvchi $F(x)$ funktsiya berilgan $f(x)$ funktsiya uchun **boshlang'ich funktsiya** deyiladi.

Masalan, $f(x)=\cos x$ funktsiya uchun $F(x)=\sin x$ boshlang'ich funktsiya bo'ladi, chunki $F'(x)=(\sin x)'=\cos x$ tenglik o'rinlidir. Huddi

$$\text{Shunday} \quad F(x)=\frac{4}{x}$$

Funktsiya barcha x nuqtalarda $f(x)=x^3$ uchun boshlang'ich funktsiya bo'ladi, chunki bunda (1) tenglik o'rinli bo'ladi. Berilgan $y=F(x)$ funktsiyaning $y'=F'(x)$ hosilasi bir qiymatli aniqlanadi. Masalan, $y=x^3$ funktsiya yagona $y'=3x^2$ hosilaga ega. Ammo $y=f(x)$ funktsiyaning boshlang'ichi $F(x)$ funktsiyani topish masalasi bir qiymatli hal qilinmaydi. Haqiqatdan ham, agar $F(x)$ funktsiya $f(x)$ funktsiya uchun boshlang'ich

funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy C o'zgarmas son uchun $F(x)+C$ funksiya ham $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki $[F(x)+C]'=F'(x)+(C)'=f(x)$.

Masalan, $f(x)=3x^2$ uchun ixtiyoriy C o'zgarmasda $x^3 + C$ boshlang'ich funksiya bo'ladi. Bundan berilgan funksiya uchun boshlang'ich funksiya yagona emasligi kelib chiqadi.

Bu tasdiq quyidagi teorema bilan aniqlanadi:

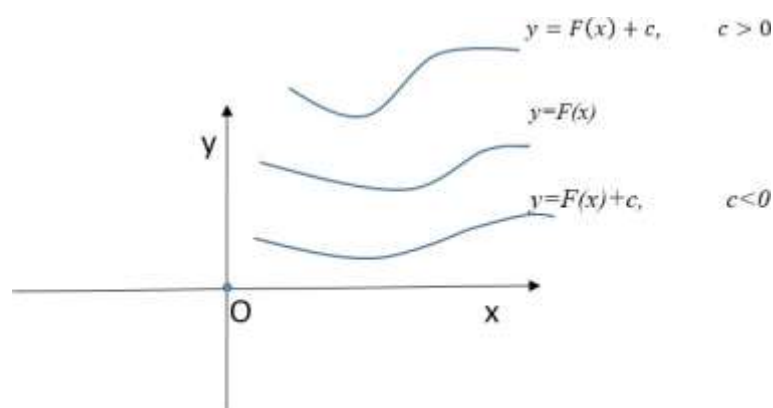
Teorema. Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ dagi boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda ular orasidagi ayirma o'zgarmas songa teng, ya'ni $F_1(x) - F_2(x)=C$.

Ta'rif. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda $F(x) + C$ ifoda $f(x)$ funkiyadan olingan **aniqmas integral** deyiladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi. Demak, ta'rifga asosan

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (2)$$

Bu yerda \int -integral belgisi, $f(x)$ – **integral ostidagi funksiya**, $f(x)dx$ **integral ostidagi ifoda**, x esa **integrallash o'zgaruvchisi** deyiladi. Berilgan $f(x)$ funksiyaning $\int f(x)dx$ aniqmasintegralini topish amali bu **funksiyani integrallash** deyiladi. Aniqmas integral $y = F(x) + C$ funksiyalar sinfini ifodalashi ma'lum. Shuning uchun ham geometrik nuqtai nazardan, aniqmas integral $y=F(x)$ funksiya grafignini Oy koordinata o'qi bo'ylab parallel ko'chirishdan hosil bo'ladigan chiziqlar sinfidan iborat bo'ladi (1-chizma).



1-chizma Aniqmas integral bir qator xossalarga ega:

I. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiya teng, ya'ni $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ Aniqmas integralning differensial integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

I. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan

C o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

II. Biror funksiyaning differensialidan olingan aniqmas integralshu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

III. O'zgarmas ko'paytuvchi k ni integral belgisi oldiga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx .$$

IV. Ikkita funksiya algebraik yig'indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas intgrallarning algebraik yig'indisiga teng, ya'ni $\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$.

V. Agar a va b o'zgarmas sonlar bo'lsa, u holda quyidagi tasdiq o'rinlidir:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Hosilalar jadvali va oldin hisoblagan bir qator hosilalardan hamda aniqmas integral ta'rifidan foydalanib quyidagi asosiy integrallar jadvalini hosil qilamiz:

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1) \quad 9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad 10. \int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C; \quad 11. \int ctg x dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad 12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C;$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 13. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C; \quad 15. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \lambda} \right| + C.$$

Bu yerda keltirilgan integrallar jadvalidan foydalanib kelgusida ko'plab integrallarni hisoblash mumkin

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab quvvatlash va shuningdek, V.I.Romanovskiylar nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan

takomillashtirish to'g'risida"gi PQ-4387 sonli qarori.

2. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.M.Mirziyoyevning Oliy majlisga murojatnomasi, "Yangi O'zbekiston" gazetasi, 2020 yil 25 yanvar, №1.
3. So'fiyev T. Maktabda matematik analiz elementlari. Toshkent. "O'qituvchi" 1983.
4. Rasulov N.P., Safarov I.I., Muxitdinov R.T. Oliy matematika. Toshkent, 2012.
5. Piskunov N.S. Differensial va integral hisob. I-tom. Toshkent. "O'qituvchi", 1984.
6. Piskunov N.S. Differensial va integral hisob. II-tom. Toshkent. "O'qituvchi", 1984.
7. Ibaydullayev T.T., Ahlimirzayev A, Raximberdiyev E., Qo'chqarov E. Oliy matematika. Toshkent. "Innovatsiya-ziyo".