ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ КОПУЛА ФУНКЦИЙ

Душатов Н.Т.
Алмалыкский филиал Ташкентский государственный технический университет имени Ислама Каримова
n_dushatov@rambler.ru

Аннотация. *Рассматривается задача метод оценивания совместной функция выживания* F_n и функционал Φ_n *при случайном цензурировании наблюдений справа используя копула функции*. В настоящей работе исследованы свойства процесса $\{\Delta_n(x,y)\}$. *Для построения оценок используются архимедова копула функции.*

Ключевые слова. *случайное цензурирование, совместной функция выживания,* маргинальные функции выживания, копула функция*, архимедова копулы.*

На вероятностном пространстве (Ω, A, P) рассмотрим две последовательности $\mathrm{X} = \{(X_{1i}, X_{2i}), i \ge 1\}$ и $\mathrm{Y} = \{(Y_{1i}, Y_{2i}), i \ge 1\}$ − независимых и одинаково распределённых случайных векторов с общими функциями распределения (ф.р.) $F(x,y) = P(X_{11} \le x, X_{21} \le y)$ и $G(x,y) = P(Y_{11} \le x, Y_{21} \le y)$ $(x,y) \in \bar{R}^{+2}$. Последовательности X и Y могут быть зависимыми [3]. Статистический эксперимент состоит в том, что последовательность X цензурируется последовательностью Y справа и в $n-$м шаге наблюдению доступна выборка $\mathrm{V}^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i), i = \overline{1,n}\}$, где $Z_i = (Z_{1i}, Z_{2i})$, $Z_{ki} = \min(X_{ki}, Y_{ki})$, $\delta_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i})$, $\delta_{ki} = I(Z_{ki} = X_{ki})$, $k = 1,2$, $i = \overline{1,n}$ [1]. Задача состоит в оценивании функционалов от ф.р. F по выборке $\mathrm{V}^{(n)}$ при мешающей ф.р. G. Пусть $\overline{F}(x,y) = P(X_{11} > x, X_{21} > y)$ и $\overline{G}(x,y) = P(Y_{11} > x, Y_{21} > y)$, $(x,y) \in \bar{R}^{+2}$ совместные функции выживания пар (X_{1i}, X_{2i}) и (Y_{1i}, Y_{2i}) соответственно. Введём маргинальные функции выживания

$$\begin{gathered} S_1^X(x) = P(X_{11} > x),\ S_2^X(y) = P(X_{21} > y), \\ S_1^Y(x) = P(Y_{11} > x), S_2^Y(y) = P(Y_{21} > y),\ x, y \ge 0, \end{gathered} \tag{1}$$

и предположим, что они являются непрерывными. Тогда ф.р. $F(x,y)$ может быть представлен через $\overline{F}(x,y)$, $S_1^X(x)$ и $S_2^X(y)$ следующим образом

$$F(x,y)=\overline{F}(x,y)+1-S_1^X(x)-S_2^X(y). \qquad (2)$$

Введём совместную функцию выживания вектора $(X_{11},X_{21},Y_{11},Y_{21})$:

$$K(x,y,z,v)=P(X_{11}>x,X_{21}>y,Y_{11}>z,Y_{21}>v),\ (x,y,z,v)\in\overline{R}^{+4}.$$

Тогда имеем следующие представления для $\overline{F}$ и $\overline{G}$:

$$\overline{F}(x,y)=K(x,y,0,0),\ (x,y)\in\overline{R}^{+2},$$

$$\overline{G}(x,y)=K(0,0,x,y),\ (x,y)\in\overline{R}^{+2},$$

$$H(x,y)=P(Z_{11}>x,Z_{21}>y)=P(X_{11}>x,Y_{11}>x,X_{21}>y,Y_{21}>y)=$$

$$=K(x,y,x,y),(x,y)\in\overline{R}^{+2}.$$

(3)

По теореме Склара [4] существует копула функция выживания $C(\overline{u}),\ \overline{u}=(u_1,u_2,u_3,u_4)\in[0,1]^4$ такая, что имеет место следующее представление для всех $(x,y,z,t)\in\overline{R}^{+4}$

$$K(x,y,z,t)=C\left(S_1^X(x),S_2^X(y),S_1^Y(z),S_2^Y(t)\right). \qquad (4)$$

Предположим, что копула C является архимедовой [4]:

$$C(u_1,u_2,u_3,u_4)=\varphi^{[-1]}\left[\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\varphi(u_3)+\varphi(u_4)\right],\overline{u}=(u_1,u_2,u_3,u_4)\in[0,1]^4$$

.(5)

Тогда согласно формулам (3) – (5) имеем

$$\overline{F}(x,y)=\varphi^{[-1]}\left[\varphi\left(S_1^X(x)\right)+\varphi\left(S_2^X(y)\right)\right],\ (x,y)\in\overline{R}^{+2},$$

$$\overline{G}(x,y)=\varphi^{[-1]}\left[\varphi\left(S_1^Y(x)\right)+\varphi\left(S_2^Y(y)\right)\right],\ (x,y)\in\overline{R}^{+2},$$

$$H(x,y)=\varphi^{[-1]}\left[\varphi\left(S_1^X(x)\right)+\varphi\left(S_2^X(y)\right)+\varphi\left(S_1^Y(x)\right)+\varphi\left(S_2^Y(y)\right)\right],\ (x,y)\in\overline{R}^{+2}.$$

(6)

и отсюда имеем:

$$S_1^Z(x)=\varphi^{[-1]}\left[\varphi\left(S_1^X(x)\right)+\varphi\left(S_1^Y(x)\right)\right],\ x\geq 0,$$

$$S_2^Z(y)=\varphi^{[-1]}\left[\varphi\left(S_2^X(y)\right)+\varphi\left(S_2^Y(y)\right)\right],\ y\geq 0. \qquad (7)$$

Из формулы (7) также следует, что

$$\varphi\left(H(x,y)\right)=\varphi\left(\overline{F}(x,y)\right)+\varphi\left(\overline{G}(x,y)\right),\ (x,y)\in\overline{R}^{+2}. \qquad (8)$$

Следует отметить, что формулы (7) позволяют оценить одномерные функции выживания S_1^X и S_2^X по выборкам $V_1^{(n)}=\left\{(Z_{1i},\delta_{1i}),\ i=\overline{1,n}\right\}$ и $V_2^{(n)}=\left\{(Z_{2i},\delta_{2i}),\ i=\overline{1,n}\right\}$ соответственно, $V_1^{(n)}+V_2^{(n)}=V^{(n)}$, а затем по выборке

$\mathrm{V}^{(n)}$ оценить $\overline{F}$, используя формулу (6). Таким образом, оценим функции S_1^X и S_2^X и с этой целью введём эмпирические оценки для H, S_1^Z и S_2^Z [1]:

$$H_n(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_{1i}>x, Z_{2i}>y),\ (x,y)\in \overline{R}^{+2},$$

$$S_{1n}^Z(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_{1i}>x)=H_n(x,0),\ x\geq 0, \qquad (9)$$

$$S_{2n}^Z(y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_{2i}>y)=H_n(0,y),\ y\geq 0.$$

Введём по выборкам $\mathrm{V}_1^{(n)}$ и $\mathrm{V}_2^{(n)}$ также и соответствующие считающие процессы

$$\overline{\square}_{mn}(t)=\sum_{k=1}^{n} I(Z_{mk}\leq t, \delta_{mk}=1),\ m=1,2;$$

$$\overline{\square}_{mn}^{Z}(t)=\sum_{k=1}^{n} I(Z_{mk}\leq t),\ m=1,2;$$

$$\mathrm{J}_m(t)=nS_{mn}^Z(t-)=\sum_{k=1}^{n} I(Z_{mk}\geq t),\ m=1,2.$$

В работе автора [2] построена и исследована следующая оценка для S_m^X, $m=1,2$:

$$S_{mn}^X(x)=\varphi^{[-1]}\left[\varphi\left(S_{mn}^Z(x)\right)\frac{\varphi\left(\tilde{S}_{mn}^X(x)\right)}{\varphi\left(\tilde{S}_{mn}^Z(x)\right)}\right],\ m=1,2, \qquad (10)$$

где

$$\varphi\left(S_{mn}^Z(x)\right)=-\int_0^x I\left(\mathrm{J}_{mn}(t)>0\right)\left[\varphi\left(\frac{\mathrm{J}_{mn}(t)}{n}\right)-\varphi\left(\frac{\mathrm{J}_{mn}(t)}{n}-\frac{1}{n}\right)\right]d\overline{\square}_{mn}^{Z}(t),$$

$$\varphi\left(\tilde{S}_{mn}^Z(x)\right)=-\int_0^x I\left(\mathrm{J}_{mn}(t)>0\right)\varphi'\left(\frac{\mathrm{J}_{mn}(t)}{n}\right)d\overline{\square}_{mn}^{Z}(t),$$

$$\varphi\left(\tilde{S}_{mn}^X(x)\right)=-\int_0^x I\left(\mathrm{J}_{mn}(t)>0\right)\varphi'\left(\frac{\mathrm{J}_{mn}(t)}{n}\right)d\overline{\square}_{mn}(t).$$

Теперь оценим $\overline{F}(x,y)$ по первой формуле (6) при помощи S_m^X, $m=1,2$:

$$\overline{F}_n(x,y)=\varphi^{[-1]}\left[\varphi\left(S_{1n}^X(x)\right)+\varphi\left(S_{2n}^X(y)\right)\right]. \qquad (11)$$

Методом подстановки и из представлений (2), (10), (11) получаем оценки для $F(x,y)$:

$$F_n(x,y)=\overline{F}_n(x,y)+1-S_{1n}^X(x)-S_{2n}^X(y). \qquad (12)$$

Рассмотрим следующий функционал:

$$\Phi(F)(x,y)=\int_0^x\int_0^y st dF(s,t).$$

Используя оценку F_n, получаем соответствующую оценку Φ_n для Φ. В настоящей работе исследованы свойства процесса $\left\{\Delta_n(x,y)=\left|\Phi_n(F)(x,y)-\Phi(F)(x,y)\right|\right\}$.

Литература

1. Абдушукуров А.А. Статистика неполных наблюдений. Асимптотическая теория оценивания для неклассических моделей. – Ташкент. «Университет», 2009. -267 с.

2. Мурадов Р.С. Статистическое оценивание функциональных характеристик по многомерным зависимым наблюдениям. Матер. науч.конф. «Проблемы современной математики» (ММР’2011). Карши. 2011.

3. Dushatov N.T., Obloqulov S.Z. Tasodifiy miqdorlar yigindisining yuqori tartibli momentlarini xarakteristik funksiyalar metodi orqali aniqlash. Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences. (E)ISSN: 2181-1784. 4(6), June, 2024 p.128-130.

4. Nelsen R.B. An introduction to copulas. – Springer, New York. 1999. (Second edition in 2006.) -269 p.